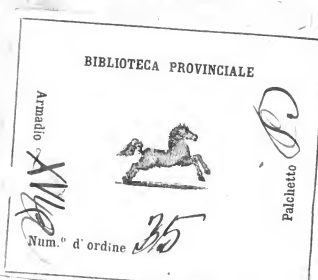

VITTORIO EM. III


FONDO PIZZOFALCONE

10. E. 16.


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVIII
Palchetto D
Num.° d'ordine 35


NAZIONALE
B. Prov.
I
1106
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

B.P
1106

C07286

COURS
DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON

ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences et de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, des Eleves et des Aspirans au Corps de l'Artillerie.

Contenant les Elémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie Sphérique.



NAPOLI

A PARIS,

De l'Imprimerie de PH.-D. PIERRES, rue St.-Jacques.

1793.



PRÉFACE.

Ce Volume, comprend, ainsi que le titre l'annonce, les Elémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne, et la Trigonométrie sphérique.

Je ne m'arrêterai point à rassembler ici les raisons qui doivent engager les Eleves destinés à la Marine, à se rendre familiers les principes répandus dans ce Livre. S'il est un art auquel l'application des Mathématiques soit utile plus qu'à un autre, c'est la Navigation; dussé-je me répéter, je dois dire que ces Sciences qui sont utiles dans d'autres parties, sont indispensables dans celle-ci.

Il ne faut pas en conclure, cependant, qu'un Livre de Géométrie Elémentaire destiné à cet objet, doive rassembler un grand nombre de propositions. S'il suffisoit, pour bien inculquer les principes d'une Science, de donner ce qui est essentiellement nécessaire au but qu'on se propose, ceux qui connoissent un peu la Géométrie savent qu'on y satisferoit en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil Livre seroit utile seulement à ceux qui ont acquis déjà des connoissances, et qu'il n'imprimeroit que de foibles traces dans l'esprit des Commençants. D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvénient à trop multiplier les conséquences, sur-tout quand elles ne sont (comme il arrive souvent) que de nouvelles traductions des principes. Il n'est

pas douteux que des Elémens destinés à un grand nombre de lecteurs, doivent suppléer aux conséquences que plusieurs n'auront pas le loisir et peut-être la faculté de tirer ; mais il faut prendre garde aussi que ceux pour qui cette attention est nécessaire, sont le moins en état de soutenir la multitude des propositions. Le seul parti qu'il y ait à prendre, est, ce me semble d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conséquences utiles, et de fixer ces deux choses dans l'esprit, par des applications ; c'est ce que j'ai tâché de faire.

J'ai partagé la Géométrie en trois Sections, dont la premiere traite des Lignes, des Angles, de leur Mesure, des Rapports des Lignes, etc. La seconde considere les Surfaces, leur mesure et leurs rapports. La troisieme est destinée aux Solides ou Corps, et renferme les principes nécessaires pour les mesurer, et comparer leurs capacités. Dans la Trigonométrie rectiligne, j'ai donné quelques propositions qui ne sont pas essentiellement nécessaires pour le moment ; mais elles sont au moins utiles, et le seront encore plus par la suite : d'ailleurs quelques-unes trouvent leur application dès la Trigonométrie sphérique. Dans celle-ci, je me suis proposé de réduire à un moindre nombre, les principes dont on fait dépendre communément la résolution des Triangles sphériques. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail ; c'est dans l'Ouvrage même qu'il faut le chercher. Ceux qui ne veulent lire que la Préface, ne gagneroient pas beaucoup au temps que je perdrois à cette analyse ; et ceux qui liront l'Ouvrage, en jugeront mieux que par ce que je pourrois en dire ici.

Dois-je me justifier d'avoir négligé l'usage des mots, *Axiômes*, *Théorême*, *Lemme*, *Corollaire*, *Scholie*, *etc ?* Deux raisons m'ont déterminé : la premiere est que l'usage de ces mots n'ajoute rien à la clarté des démonstrations : la seconde est que cet appareil peut souvent faire prendre le change à des Commençants, en leur persuadant qu'une proposition revêtue du nom de *Théorême*, doit être une proposition aussi éloignée de leurs connoissances, que le nom l'est de ceux qui leur sont familiers. Cependant afin que ceux de mes Lecteurs qui ouvriront d'autres Livres de Géométrie, ne s'imaginent pas qu'ils tombent dans un pays inconnu, je crois devoir les avertir que,

Axiôme signifie une proposition évidente par elle-même ;

Théorême, une proposition qui fait partie de la science dont il s'agit, mais dont la vérité, pour être apperçue, exige un discours raisonné qu'on appelle *Démonstration ;*

Lemme * est une proposition qui ne fait pas essentiellement partie de la Théorie dont il s'agit, mais qui sert à faciliter le passage d'une proposition à une autre ;

Corollaire est une conséquence que l'on tire d'une proposition que l'on vient d'établir ;

Scholie est une remarque sur quelque chose qui précéde, ou une récapitulation de ce qui précéde ;

Problême est une question dans laquelle il s'agit ou d'exécuter quelque opération, de démontrer quelque propostion.

* Un *Lemme* est souvent une proposition empruntée d'une autre Science.

AVERTISSEMENT.

Les nombres qu'on trouvera seuls entre deux parantheses, indiquent à quel numéro du Livre même il faut aller chercher la proposition que le Lecteur doit se rappeller dans cet endroit ; et ceux qui sont précédés du mot Arith. *renvoient à pareil numéro de l'Arithmétique.*

TABLE

DES MATIERES.

Elémens de Géométrie, page 1

PREMIERE SECTION.

Des Lignes, 2

Des Angles et de leur Mesures, 6

Des Perpendiculaires et des Obliques, 15

Des Paralleles, 18

Des Lignes droites, considérées par rapport à la circonférence du Cercle, et des circonférences de Cercle, considérées les unes à l'égard des autres, 21

Des angles considérés dans le Cercle, 26

Des Lignes droites qui renferment un espace, 30

De l'égalité des Triangles, 33

Des Polygones, 36

Des Lignes proportionnelles, 41

De la similitude des Triangles, 48

Des Lignes proportionnelles, considérées dans le Cercle, 58

Des Figures, 61

SECONDE SECTION.

Des Surfaces, 73

De la Mesure des Surfaces, 76

Du Toisé des Surfaces, 86

TABLE des Subdivisions de la Toise quarrée, en Rectangles d'une Toise de haut, et caracteres qui représentent ces parties, 88

De la Comparaison des Surfaces, 93

Des Plans, 101

Propriétés des Lignes droites coupées par des Plans paralleles, 108

TROISIEME SECTION.

Des Solides, 111

Des Solides semblables, 115

De la Mesure des surfaces des Solides, 116
Des Rapports des surfaces des Solides, 122
De la Solidité des Prismes, 124
De la Mesure de la Solidité des Prismes et des Cylindres, 125
De la Solidité des Pyramides et des Cônes, 127
Mesure de la Solidité des Pyramides et des Cônes, 128
De la Solidité de la Sphere, de ses secteurs et de ses Segmens, 131
De la Mesure des autres Solides, 133
Du Toisé des Solides, 140
Du Toisé des Bois, 147
Des Rapports des Solides en général, 148

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

De la Trigonométrie plane ou rectiligne, 155
Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes, 157
De la résolution des Triangles, Rectangles, 175
Résolution des Triangles Obliquangles, 185
Du Nivellement, 197

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Notions préliminaires, 201
Propriétés des Triangles Sphériques, 208
Moyens de reconnoître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les Triangles Sphériques Rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°, 213
Principes pour la Résolution des Triangles Sphériques Rectangles, 216
Table pour la résolution de tous les cas possibles des Triangles Sphériques Rectangles, 225
Des Triangles Sphériques Obliquangles, 226
Principes pour la résolution des Triangles Sphériques Obliquangles, 227
Résolution des Triangles Sphériques Obliquangles, 230
Remarque, 240

Fin de la Table des Matieres.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS

DE GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent, a toujours les trois dimensions, *Longueur*, *Largeur* et *Profondeur* ou *Epaisseur*.

Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble, dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée; c'est ainsi que, lorsque nous pensons à la profondeur d'une rivière, d'une rade, etc. nous ne sommes point occupés de sa longueur ni de sa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de vent qu'une voile peut occuper, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et non point du tout de son épaisseur.

Nous distinguerons donc trois sortes d'étendue; savoir :

L'étendue en longueur seulement, que nous appellerons *ligne*.

L'étendue en longueur et largeur seulement, que nous nommerons *surface* ou *superficie*.

Enfin l'étendue en longueur, largeur et profondeur, que nous nommerons indifféremment, *volume*, *solide*, *corps*.

Nous examinerons successivement les propriétés de ces trois sortes d'étendue; c'est là l'objet de la science qu'on appelle *Géométrie*.

PREMIÈRE SECTION.

Des lignes.

2. Les extrémités d'une ligne, se nomment des *points*. On appelle aussi de ce nom, les endroits où une ligne est coupée; ou encore, ceux où des lignes se rencontrent.

On peut considérer le point comme une portion d'étendue qui auroit infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur.

La trace d'un point qui seroit mu de manière à tendre toujours vers un seul et même point, est ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre; AB (*fig.* 1) est une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui dans son mouvement, se détourne infiniment peu à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une seule espèce de ligne droite, mais qu'il y a une infinité d'espèces de courbes différentes.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorsqu'il s'agit de conduire par les deux points A et B (*fig.* 1) une ligne droite, sur le papier, on sait qu'on emploie une règle qu'on applique sur les deux points A et B, ou très-près, et à distances égales de ces deux points, et avec un crayon ou une plume qu'on fait glisser le long de cette règle, on trace la ligne AB.

Mais lorsqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point A l'extrémité d'une ficelle que l'on frotte avec un morceau de craie; et appliquant un autre de ses points, sur le point B, on pince la ficelle pour l'élever au-dessus de AB, et la laissant aller, elle marque, en s'appliquant sur la surface, une trace qui est la ligne droite dont il s'agit.

Quand il est question d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre, on se contente de marquer entre ces deux extrémités, un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorsqu'on veut prendre des alignemens sur le terrein, on place à l'une des extrémités *B* (*fig.* 2) un bâton ou jallon *B D*, que par le moyen d'un fil à-plomb, on rend le plus vertical que faire se peut ; on en fixe un autre de la même manière au point *A* ; et se plaçant à ce même point *A*, on fait placer successivement plusieurs autres jallons, à différens points, *C*, *C*, etc, entre *A* et *B*, de manière qu'appliquant l'œil le plus près qu'il est possible du jallon *A D*, et regardant le jallon *BD*, celui *CD* dont il s'agit, paroisse confondu avec *BD*; alors tous les points *C*, *C*, *C*, etc. déterminés de cette manière, sont dans l'alignement *AB*.

On s'y prendroit d'une manière semblable s'il s'agissoit de prolonger la ligne droite *AB*.

Quand les deux extrémités *A* et *B* ne sont pas visibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enseignerons par la suite.

4. Les lignes se mesurent par d'autres lignes ; mais en général, la mesure commune des lignes, c'est la ligne droite. Mesurer une ligne droite ou courbe, ou une distance quelconque, c'est chercher combien de fois cette ligne, ou cette distance, contient une ligne droite connue et déterminée, que l'on considère alors comme unité. Cette unité est absolument arbitraire. Aussi y a-t-il bien des espèces de mesures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toise et de ses parties dont nous avons fait connoître les subdivisions en Arithmétique, on distingue encore le pas ordinaire, le pas géométrique, la brasse, etc. pour les petites étendues ; la lieue, le mille, le werste, etc. pour les grandes étendues.

Le pas ordinaire est de 2 pieds et demi.

Le pas géométrique, qu'on appelle autrement pas double, est de 5 pieds.

La brasse est de 5 pieds ; on compte par

brasses, dans la marine, les longueurs des cordages, et les profondeurs qu'on mesure à la sonde.

La lieue est composée d'un certain nombre de toises ou de pas géométriques. La lieue marine est de 2853 toises. Le mille, le werste, etc. sont pareillement des mesures itinéraires, dont la valeur, ainsi que celle de la lieue, n'est pas la même dans tous les pays, tant parce que chacune de ces especes de mesures n'a pas partout le même nombre d'unités, c'est-à-dire, le même nombre de pas, ou de toises, ou de pieds, etc. que parce que le pied qui sert d'unité à ces toises ou à ces pas, n'est pas de même grandeur par-tout.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures dans lesquelles nous les considérerons, sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite, dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons dans ces Elémens, que *la circonférence du Cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe $BCFDG$, (*fig.* 3) dont tous les points sont également éloignés d'un même point A, pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point A se nomme le *Centre*; les lignes droites AB, AC, AF, etc. qui vont de ce point à la circonférence, se nomment *rayons*; et tous ces rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme BD, qui, passant par le centre, se terminent de part et d'autre à la circon-

férence, sont appellées *diamètres ;* comme chaque diamètre est composé de deux rayons, tous les diamètres sont donc égaux. Il est d'ailleurs évident que tout diamètre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales ; car, si l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli soit dans le diamètre BD, tous les points de BGD doivent s'appliquer sur $BCED$, sans quoi il y auroit des points de la circonférence qui seroient inégalement éloignés du centre.

Les portions BC, CE, ED, etc. de la circonférence, se nomment *arcs ;* et ce qu'on appelle *cercle*, c'est la surface même renfermée par la circonférence $BCFDGB$.

Une droite, comme DF, qui va de l'extrémité D d'un arc, à l'autre extrémité F, s'appelle *corde* ou *soutendante* de cet arc.

7. Il est aisé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux*, *soutendent des arcs égaux*, *et réciproquement.* Car si la corde DG est égale à la corde DF, en imaginant qu'on transporte la corde DG et son arc, pour appliquer DG sur DF, il est visible que le point D étant commun, et le point G tombant alors sur le point F, tous les points de l'arc DG doivent tomber sur l'arc DF, puisque si quelqu'un de ces points ne tomboit pas sur l'arc DF, l'arc DG n'auroit pas tous ces points également éloignés du centre A.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales auxquelles on a donné le nom de *degrés.* On partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*, chaque minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes ;* et de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécu-

tivement, les noms *minutes*, *secondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, etc.

La marque du degré est celle-ci......... d ou ^{0}
Celle de la minute...................... $'$.
De la seconde........................... $''$
De la tierce............................ $'''$
De la quarte............................ IV

Ainsi pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit 3^{d} 24′ 55″.

Cette division de la circonférence est admise généralement ; mais des vues de commodité dans la pratique, ont introduit dans quelques parties des Mathématiques pratiques, quelques usages particuliers dans la maniere de compter les degrés et parties de degré. Les Astronomes, par exemple, comptent les degrés, par trentaines qu'ils appellent *signes*, c'est-à-dire, qu'ayant à compter 66° 42′, par exemple; comme ce nombre renferme 2 fois 30° et 6° 42′ de plus, ils compteroient 2 signes et 6° 42′, et ils écriroient 2^{s} 6° 42′.

Les Marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, donc chacune se nomme *air* ou *rhumb* de vent : chacune de ces parties est donc la 32e partie de 360°, c'est-à-dire, qu'elle est de 11° 15′, ainsi au lieu de 45°, on dit 4 airs de vent, parce que 45° font 4 fois 11° 15′; pareillement au lieu de 18° 27′, on diroit 1 air de vent, et 7° 12′.

Des Angles et de leur Mesure.

9. Deux lignes *AB*, *AC* qui se rencontrent, peuvent former entr'elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *figures* 4, 5, 6,

Cette ouverture BAC, est ce qu'on appelle un *angle ;* et cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui le comprennent, sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes, ou l'une, une ligne droite, et l'autre, une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le présent, que des angles rectilignes.

10. Pour se former une idée exacte d'un angle; il faut concevoir que la ligne droite AB étoit d'abord couchée sur AC, et qu'on l'a fait tourner sur le point A, (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position AB qu'elle a actuellement. La quantité dont AB a tourné, est précisément ce qu'on appelle un *angle.*

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés; en sorte que l'angle formé par les lignes AC, AB (*fig.* 4), est absolument le même que celui que forment les lignes AF et AE, qui sont une extension de celles-là; en effet la ligne AB et la ligne AE ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur position actuelle.

Le point A où se rencontrent les deux lignes AB, AC, s'appelle le *sommet de l'angle*, et les deux lignes AB, AC, en sont les côtés.

Pour désigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le sommet, et les deux autres sont placées le long des côtés ; et en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du sommet au milieu ; ainsi, pour désigner l'angle compris par les deux lignes AB, AC, nous dirons l'angle BAC, ou CAB.

Cette attention est principalement nécessaire lorsque plusieurs angles ont leur sommet au même point ; car, si

dans la *fig.* 4, par exemple, on disoit simplement l'angle *A*, on ne sauroit si l'on veut parler de l'angle *BAC*, ou de l'angle *BAD*; mais lorsqu'il n'y a qu'un seul angle, comme dans la *figure* 4*, on peut dire simplement l'angle *a*; c'est-à-dire, le désigner par la lettre de son sommet.

11. Puisque l'angle *BAC* (*fig.* 4), n'est autre chose que la quantité dont le côté *AB* auroit dû tourner sur le point *A* pour venir de la position *AC* dans la position *AB*, et que dans ce mouvement chaque point de *AB*, le point *B*, par exemple, restant toujours également éloigné de *A*, décrit nécessairement un arc de cercle, qui augmente ou diminue précisément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue, il est naturel de prendre cet arc pour mesure de l'angle; mais comme chaque point de *AB* décrit un arc de longueur différente, ce n'est point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ses degrés et parties de degré, qui sera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de *AB*, puisque tous ces points commençant, continuant et finissant leur mouvement dans le même temps, font nécessairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'est que les points les plus éloignés du point *A*, font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que.......

12. *Un angle quelconque* BAC (fig. 4), *a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

Ainsi, quand par la suite nous dirons, un tel angle a pour mesure un tel arc, on doit entendre qu'il a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de cet arc.

13. Donc, *pour diviser un angle en plusieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure,

en autant de parties égales, et de tirer, par les points de division, des lignes au sommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la division des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre* ; par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *ac* (*fig.* 5), un angle égal à l'angle *BAC* (*fig.* 4), il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, et du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *cb* ; posant ensuite la pointe du compas sur le sommet *A* de l'angle donné *BAC*, on décrira, de la même ouverture l'arc *BC* compris entre les deux côtés de cet angle, et ayant pris avec le compas, la distance de *C* à *B*, on la portera de *c* en *b*, ce qui donnera le point *b* par lequel, et par le point *a* tirant la ligne *ab*, on aura l'angle *bac* égal à *BAC*.

En effet l'angle *bac* a pour mesure *bc* (12) et l'angle *BAC* a pour mesure *BC*. Or, ces deux arcs sont égaux, puisqu'appartenans à des cercles égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (7) ; car la distance de *b* à *c*, a été faite la même que celle de *B* à *C*.

15. L'angle *BAC* (*fig.* 5) se nomme angle *droit*, lorsque l'un *AB* de ses côtés ne penche ni vers l'autre côté *AC*, ni vers son prolongement *AD*.

On l'appelle angle *aigu* (*fig.* 4) lorsque l'un *AB* de ses côtés penche plus vers l'autre côté *AC*, que vers son prolongement *AD*.

Enfin, on l'appelle *obtus* (*fig.* 6) lorsqu'un côté *AB* penche plus vers le prolongement de l'autre côté *AC*, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12), sur la mesure des angles, 1.° qu'*un angle droit a pour mesure* 90^d ; *un angle aigu, moins que* 90^d ; *et un angle obtus, plus que* 90^d.

Car si la ligne *AE* (*fig.* 3) ne penche ni vers *AB*, ni vers son prolongement *AD*, les deux angles *BAE*, *DAE* seront égaux ; donc les arcs *BE* et *DE*, qui leur servent de mesure, seront aussi

égaux; or, ces deux arcs composant ensemble la demi-circonférence, valent ensemble 180^d; donc chacun d'eux est de 90^d; donc aussi les deux angles *BAE*, *DAE* sont chacun de 90^d.

D'après cela il est évident que *BAC* est de moins, et *BAF* de plus que 90^d.

17. 2.° *Les deux angles* BAC, BAD, (fig. 4, 5 et 6) *que forme une ligne droite* AB *tombant sur une autre droite* CD, *valent toujours ensemble* 180^d. Car on peut toujours regarder le point *A* (*fig.* 4) comme le centre d'un cercle, dont *CD* est alors un diamètre : or, les deux angles *BAC*, et *BAD* ont pour mesure les deux arcs *BC* et *BD* qui composent la demi-circonférence; ils valent donc ensemble 180^d, ou autant que deux angles droits.

18. 3.° *Que si d'un même point* A (fig. 3) *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, etc. *qu'on voudra; tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB *qu'elles comprennent ne feront jamais que* 360^d : car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles tels que *BAC* et *BAD* (*fig.* 4) qui pris ensemble font 180 degrés, sont dits *supplément* l'un de l'autre; ainsi *BAC* est le supplément de *BAD*, et *BAD* est le supplément de *BAC*; parce que l'un de ces angles est ce qu'il faudroit ajouter à l'autre pour faire 180 degrés.

Les angles égaux auront donc des supplémens égaux; et ceux qui auront des supplémens égaux, seront égaux.

20. Concluons de-là *que les angles* BAC, EAD

(fig. 7) *opposés au sommet et formés par les deux droites* BD *et* EC, *sont égaux.*

Car *BAC* a pour supplément *CAD*, et *EAD* a aussi pour supplément *CAD*.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc est plus petit ou plus grand que 90 degrés. Ainsi (*fig*. 3) l'angle *BAC* a pour complément *CAE*; l'angle *BAF* a pour complément *FAE*. Le complément est donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il faut en retrancher, pour qu'il vaille 90 degrés.

Les angles aigus qui auront des complémens égaux, seront donc égaux, et réciproquement; il en sera de même des angles obtus.

On rencontre sans cesse les angles, tant dans la théorie que dans la pratique. Nous aurons assez d'occasions par la suite de nous convaincre qu'on les rencontre à chaque pas dans la théorie. Quant à la pratique, nous ferons remarquer que c'est par les angles qu'on juge de la route que suit un Navire; qu'on distingue si un Navire qu'on rencontre en mer, a le vent sur nous, ou si nous l'avons sur lui; c'est par les angles qu'on détermine les positions des objets, les uns à l'égard des autres; c'est en variant les angles que les voiles et le gouvernail font avec la quille, qu'on produit les différentes évolutions du Navire, qu'on change sa route, et qu'on accélere ou qu'on retarde son mouvement, C'est encore par la mesure des angles qu'on parvient à déterminer en mer, en quel lieu on est.

Les instrumens qui servent à mesurer les angles, ou à former des angles, tels qu'on le juge à propos, sont en assez grand nombre; nous allons faire connoître les principaux.

22. L'instrument représenté par la *figure* 8, et qu'on appelle *Rapporteur*, sert à mesurer les angles sur le papier, et à former sur le papier les angles dont on peut avoir besoin. L'usage en est commode et fréquent. C'est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180 degrés. Le centre de cet instrument est marqué par une petite échancrure *C*. Quand on veut mesurer un angle tel que *BAC* (*fig.* 4, 5, 6) on applique le centre *C* sur le sommet *A* de l'angle qu'on veut mesurer, et le rayon *CB* du même instrument, sur l'un *AC* des côtés de cet angle; alors le côté *AB* prolongé, s'il est nécessaire, fait connoître par celle des divisions de l'instrument, par laquelle il passe, de combien de degrés est l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle *BAC*, et par conséquent (12) de combien de degrés est cet angle *BAC*.

Pour faire, avec le même instrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés, on applique le rayon *CB* de l'instrument sur la ligne qui doit servir de côté à l'angle qu'on veut former, et de manière que le centre *C* soit sur le point où cet angle doit avoir son sommet; puis cherchant sur les divisions de l'instrument, le nombre de degrés en question, on marque sur le papier, un point en cet endroit; par ce point et par le sommet, on tire une ligne droite qui fait alors avec la première, l'angle demandé.

23. Pour mesurer les angles sur le terrein, on emploie l'instrument représenté par la figure 9; on le nomme *Graphometre*. C'est un demi-cercle divisé en 180°, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diametre. Le diametre *DB* fait corps avec l'instrument; mais le diametre *EC*, qu'on nomme *Alidade*, n'y est assujéti que par le centre *A*, autour duquel il peut tourner et parcourir par son extrémité C toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diametres est garni à ses deux extrémités de pinnules, à travers lesquelles on regarde les objets. L'instrument est porté par un pied, et peut, sans rien changer

à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon qu'on en a besoin.

Quand on veut mesurer l'angle que forment deux lignes droites tirées d'un point *A* où l'on est, à deux autres objets F et *G*, on place le centre du graphometre en *G*, et on dispose l'instrument de maniere que regardant à travers les pinnules du diamettre fixe *DAB*, on apperçoive l'un F de ces deux objets, et qu'en même temps l'autre objet *G*, se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphometre; alors on fait mouvoir l'alidade *EC*, jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir l'objet *G* à travers des pinnules *E* et C, l'arc *B*C compris entre les deux diametres, est alors la mesure de l'angle *GA*F.

On voit aussi, d'après ce que nous venons de dire, comment on peut former sur le terrein un angle d'un nombre déterminé de degrés. On fait le plus souvent sur la largeur, et à l'extrémité du diametre mobile, des divisions, qui selon la maniere dont elles correspondent aux divisions même de l'instrument, servent à connoître les parties de degré de 5 en 5 minutes, ou de 3 en 3.

Cet instrument est aussi, le plus souvent, garni d'une *Boussole* ordinaire ou simple: on la voit dans la même figure 9.

L'aiguille aimantée qui en fait la piece principale, est soutenue en son milieu sur un pivot sur lequel elle a toute la mobilité possible. Comme sa propriété est de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (au moins dans un même lieu, et pendant un assez long intervalle de temps), on l'emploie utilement sur ces sortes d'instru-

mens, pour déterminer la position des objets à l'égard des points cardinaux, ou à l'égard de la ligne Nord et Sud, avec laquelle elle fait toujours le même angle dans un même lieu. Sur le bord de la cavité qui renferme l'aiguille, on marque communément les 360° de la circonférence. Quand on tourne l'instrument, l'aiguille, par la propriété qu'elle a de revenir dans une même situation, marque par la nouvelle division à laquelle elle répond, de combien de degrés l'instrument a tourné.

On emploie aussi la boussole ordinaire sans le graphometre, mais seulement pour déterminer grossierement les points de détail d'un plan ou d'une carte, dont les points principaux ont été fixés avec exactitude, de la maniere que nous exposerons par la suite.

24. La *Boussole marine*, ou le *Compas de mer*, ou encore le *Compas de variation* (Fig. 10,) ne differe gueres de la boussole ordinaire que par une suspension qui lui est propre, et qui a pour objet de faire que les parties de cette machine, qui servent à la mesure des angles, ne participent à d'autres mouvemens du vaisseau qu'à ceux qu'il peut avoir pour tourner horizontalement. Lorsqu'elle n'est employée qu'à reconnoître la direction de la quille du vaisseau, on l'appelle *Compas de route*. Elle est renfermée dans une espece d'armoire qu'on appelle *Habitacle*, et qui est située dans le sens de la largeur du vaisseau. L'aiguille n'est pas isolée sur son pivot, comme dans la boussole ordinaire, elle seroit trop sujette à vaciller; on la charge d'un morceau de talc taillé en rond, et collé entre deux morceaux de papier; on trace dessus, la rose des vents;

c'est-à-dire, qu'on en partage la circonférence en rhumbs de vent. On conçoit donc que si le vaisseau vient à tourner d'une certaine quantité, comme l'aiguille reste toujours ou revient toujours à la même situation, elle ne répondra plus au même point de l'habitacle ; en observant donc quel est le rhumb de vent qui répond à celui qu'occupoit d'abord l'aiguille, on connoîtra de combien le vaisseau a tourné. On pourra donc s'en servir pour ramener et retenir constamment le vaisseau dans une même direction.

Quand on emploie la boussole à *relever* des objets, c'est-à-dire, à reconnoître l'*air de vent* auquel ils répondent, on l'appelle *Compas de variation* : ce nom lui vient d'un autre usage dont ce n'est pas ici le lieu de parler. Alors on la garnit de deux pinnules *A* et *B* (*fig.* 10), par lesquelles on vise aux objets dont on veut connoître la situation. En mer, il faut deux Observateurs ; l'un qui tourne et ajuste le compas de variation, de maniere à appercevoir l'objet ; et pendant ce temps, l'autre observe quelle est la position de l'aiguille à l'égard de la ligne *DE* qui est un fil tendu à angles droits sur la ligne qu'on conçoit passer par *A* et *B*.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

25. Nous avons dit (15) que la ligne *AB* (*fig.* 5) qui ne penche ni vers *AC*, ni vers *AD*, formoit avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne *AB* est aussi ce qu'on appelle *une Perpendiculaire* à la ligne *AC* ou *DC*, ou *AD*.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes, les trois propositions suivantes.

est nécessairement plus éloigné de tel point de AB qu'on voudra, que le point F ne peut l'être du même point ; donc AC est plus grande que AF; donc aussi la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

30. Les lignes AF, AC, AG, sont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire AE et de la ligne CD; et en général, une ligne est oblique à une autre, quand elle fait, avec cette autre, un angle ou aigu ou obtus.

31. Puisque (29) les obliques AF, AG, sont égales lorsqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure que *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur le milieu* E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ses points est autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G ; car il est évident que ce qu'on a dit du point A s'applique également à tout autre point de la ligne AE ou AB.

32. Il n'est pas moins évident qu'*il n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *sur le milieu de* FG, *qui puissent être également éloignés de* F *et de* G ; car tout point qui sera à droite ou à gauche de la perpendiculaire, est évidemment plus près de l'un de ces points, que de l'autre.

Donc pour qu'une ligne soit perpendiculaire sur une autre, il suffit qu'elle passe par deux points dont chacun soit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

33. Concluons de là 1.° que *pour élever une perpendiculaire sur le milieu d'une ligne* AB (*fig.* 12.), il faut poser une pointe du compas en B, et d'une ouverture plus grande que la moitié de AB, tracer un arc IK ; poser ensuite la pointe du compas en A, et de la même ouver-

ture, tracer un arc *LM*, qui coupe le premier au point *C*, qui sera également éloigné de *A* et de *B*. On déterminera ensuite, de la même manière, un autre point *D*, soit au-dessous, soit au-dessus de *AB*, en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin, on tirera par les deux points *C* et *D* la ligne *CD*, qui (32) sera perpendiculaire sur le milieu de *AB*.

34. 2.° *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* AB (fig. 13), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en *E*, et d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne *AB*, on tracera avec l'autre pointe deux petits arcs qui coupent *AB* aux points *C* et *D*; puis de ces deux points comme centres, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de *CD*, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *F*, par lequel et par le point *E*, on tirera la ligne *EF*, qui sera perpendiculaire sur *AB* (32), puisqu'elle aura deux points *E* et *F* également éloignés, chacun, des deux points *C* et *D* de la ligne *AB*.

35. Si le point *E*, par lequel on veut que la perpendiculaire passe, étoit sur la ligne même *AB*, on opéreroit encore de la même manière : *voyez figure* 14.

Enfin, si le point *E* étoit tellement placé, qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points *C* ou *D*, on prolongeroit la ligne *AB*, et on opéreroit encore de même : *voyez figures* 15 *et* 16. La *figure* 16 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne *AB*.

Des Parallèles.

36. Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entr'elles.

Donc, *deux parallèles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre;* car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvoient plus près

qu'en un autre, elles seroient inclinées l'une à l'autre, et par conséquent elles pourroient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1.° *Lorsque deux lignes parallèles* AB *et* CD (fig. 17), *sont coupées par une troisième ligne* EF, *qu'on appelle alors sécante, les angles* BGE, DHE, *ou* AGH, CHF, *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, sont égaux;* car les lignes *AB* et *CD*, n'ayant aucune inclinaison entre elles (36), doivent nécessairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2.° *Les angles* AGH, GHD *sont égaux.* Car on vient de voir que *AGH* est égal à *CHF;* or *CHF* (20) est égal à *GHD;* donc *AGH* est égal à *GHD.*

39. 3.° *Les angles* BGE, CHF *sont égaux.* Car *BGE* est égal à *AGH* (20); or on a vu (37) que *AGH* est égal à *CHF;* donc *BGE* est égal à *CHF.*

40. 4.° *Les angles* BGH, DHG, *ou* AGH, CHG, *sont supplément l'un de l'autre.* Car *BGH* est supplément de *BGE*, qui (37) est égal à *DHG.*

41. 5.° *Les angles* BGE, DHF, *ou* AGE, CHF, *sont supplément l'un de l'autre.* Car *DHF* a pour supplément *DHG*, qui (37) est égal à *BGE.*

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorsque deux lignes parallèles sont rencontrées par une troisième; et reciproquement *toutes les fois*

que deux lignes droites auront dans leur rencontre avec une troisième, l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont parallèles; cela se démontre d'une manière absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire: Les angles *BGE*, *FHC* se nomment *alternes externes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, et qu'ils sont tous deux hors des parallèles. Les angles *AGH*, *GHD*, s'appellent *alternes internes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, et tous deux entre les parallèles. Les angles *FGH*, *DHG* s'appellent *internes d'un même côté*, parce qu'ils sont entre les parallèles, et d'un même côté de la sécante *EF*. Enfin, les angles *BGE*, *DHF* se nomment *externes d'un même côté*, parce qu'ils sont hors des parallèles, et d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, 1.° *que si deux angles* ABC, DEF (fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux*. Car si l'on imagine le côté *DE* prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre *BC* en *G*, les angles *ABC*, *DGC*, seront égaux (37), et par la même raison l'angle *DGC* sera égal à l'angle *DEF*; donc *ABC* est égal à *DEF*.

44. 2°. Que *pour mener, par un point donné* C, *une ligne* CD, (fig. 19) *parallèle à une ligne* AB, il faut, par le point *C*, tirer arbitrairement la ligne indéfinie *CEF*, qui coupe *AB* en un point quelconque *E*, mener, selon ce qui a été enseigné (14), par le point *C*, la ligne *CD*, qui fasse avec *CE*, l'angle *ECD* égal à l'angle *FEB* que celle-ci fait avec *AB*; la ligne *CD* tirée de cette manière, sera parallèle à *AB* (37).

Au reste chacune des cinq propriétés établies ci dessus, peut fournir une maniere de mener une parallele.

45. Les perpendiculaires et les paralleles, dont nous venons de parler successivement, sont d'un usage très-fréquent dans toutes les parties pratiques des Mathématiques. Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces, et des solidités ou capacités des corps; elles reviennent à chaque pas dans toutes les opérations de l'Architecture navale. Comme l'angle droit est facile à construire, on fait, autant qu'on le peut, dépendre la construction des Figures, plutôt des perpendiculaires que de toute autre ligne.

Les paralleles, outre leur grand usage dans la théorie, pour démontrer facilement un grand nombre de propositions, sont la base de plusieurs opérations utiles. On les emploie beaucoup dans le pilotage, principalement pour marquer, sur les cartes marines, la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation, ce qu'on appelle *pointer* ou *faire le point.* Nous en dirons un mot par la suite.

Des lignes droites considérées par rapport à la circonférence du Cercle, et des circonférences de Cercle considérées les unes à l'égard des autres.

46. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, sans qu'il soit besoin d'en donner une démonstration rigoureuse. . . . .

1.° *Qu'une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

2.° *Que dans un même demi-cercle, la plus grande corde soutend toujours le plus grand arc, et réciproquement.*

On appelle en général *sécante* (fig. 20), toute ligne, comme *DE*, qui rencontre le cercle en deux points et qui est en partie au dehors ; et on appelle *tangent*, celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence ; telle est *AB*.

48. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point.* Car si elle la rencontroit en deux points, elle entreroit dans le cercle, puisque de ces deux points il seroit possible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre lesquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire sur la ligne qui joint ces deux points : et comme cette perpendiculaire (29) est plus courte que chacun des deux rayons, on voit que la tangente auroit des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle, elle entreroit donc dans le cercle : ce qui est contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'ensuit que le rayon *CA* (*fig.* 22) qui va au point d'attouchement, est la plus courte ligne qu'on puisse tirer du centre à la tangente ; que par conséquent (29) il est perpendiculaire à la tangente. Donc réciproquement la *tangente en un point quelconque* A *du cercle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA, *qui passe par ce point.*

48. On voit donc que *pour mener une tangente en un point donné* A *sur le cercle*, il faut tirer à ce point un rayon *CA*, et mener à son extrémité une perpendiculaire, suivant la méthode donnée (35).

49. Donc *si plusieurs cercles* (fig. 22) *ont leurs centres sur la même ligne droite* CA, *et passent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tan-*

gente commune la ligne TG *perpendiculaire à* CA, *et se toucheront par conséquent tous.*

51. Ainsi, *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, et qui touche un cercle donné* BAD (fig. 23) *en un point donné* A, il faut, par le centre *C* et par le point *A*, tirer le rayon *CA*, qu'on prolongera indéfiniment; puis du point *A* vers *T* ou vers *V* (selon qu'on voudra que l'un des cercles embrasse l'autre, ou ne l'embrasse point) porter la grandeur du rayon du second cercle; après quoi du centre *T* ou *V*, et du rayon *TA* ou *VA*, on décrira la circonférence *EF*.

51. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre du cercle, et par le milieu de l'arc soutendu par cette corde* (fig. 24).

Car elle doit passer par tous les points également éloignés des extrémités *A* et *B* (32)*; or il est évident que le centre est également éloigné des deux extrémités *A* et *B* qui sont deux points de la circonférence; donc elle passe par le centre.

Il n'est pas moins évident qu'elle doit passer par le milieu de l'arc; car si *E* est le milieu de l'arc, les arcs égaux *AE*, *BE*, ayant des cordes égales (7), le point *E* est également éloigné de *A* et de *B*; donc la perpendiculaire doit passer par le point *E*.

52. Le centre, le milieu de l'arc, et le milieu de la corde, étant tous trois sur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite passera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle passe par le troisième.

Et comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur le milieu de la corde, on doit encore conclure que si une perpendiculaire sur une corde, passe par l'un quelconque de ces trois

points ; elle passe nécessairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure,

53. 1.° *Le moyen de diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviser l'angle *BAC* (*fig.* 25) en deux parties égales, on décrira de son sommet *A* comme centre, et d'un rayon arbitraire, l'arc *DE*; puis des points *D* et *E* pris successivement pour centres, et d'un même rayon, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *G*, par lequel et par le point *A* on tirera *AG* qui (32) étant perpendiculaire sur le milieu de la corde *DE*, divisera en deux parties égales l'arc *DIE* (51), et par conséquent aussi l'angle *BAC*, puisque les deux angles partiels *BAG*, *CAG*, ont (12) pour mesure les deux arcs égaux *DI*, *EI*.

54. 2.° *Le moyen de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite.*

Soient *ABC* (*fig.* 26) ces trois points; en tirant les lignes droites *AB*, *BC*, elles seront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Elevez une perpendiculaire (33) sur le milieu de *AB*, faites la même chose sur le milieu de *BC*, le point *I* où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre. Car ce centre doit être sur *DE* (51), et par la même raison il doit être sur *FG*; il doit donc être à leur rencontre *I*, qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

55. S'il étoit question de *retrouver le centre d'un cercle ou d'un arc déjà décrit*, on voit donc qu'il n'y auroit qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, et opérer comme on vient de l'enseigner.

56. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point *I*, qui satisfasse à la question, il faut en conclure, que par trois points donnés, on ne peut faire passer qu'un seul cercle, et par conséquent que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre.*

57. 3.° *Le moyen de faire passer par un point donné* B, (fig. 27 *et* 28) *une circonférence de cercle, qui en touche une autre, dans un point donné* A.

Il faut, par le centre *C* de la circonférence donnée, et par le point *A*, où l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon *CA*, qu'on prolongera de part ou d'autre, selon qu'il sera nécessaire ; joindre le point *A* au point *B*, par lequel on veut que passe la circonférence cherchée, et élever sur le milieu de *AB* une perpendiculaire *MN*, qui coupera *AC* ou son prolongement en *D*. Ce point *D* sera le centre, et *AD* ou *BD* sera le rayon du cercle demandé ; car puisque la circonférence qu'on veut décrire doit passer par le point *A* et par le point *B*, son centre doit être sur *MN* (51) ; d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher en *A*, son centre doit être sur *CA* (49) ou sur son prolongement ; il est donc au point d'intersection de *CA* et de *MN*.

58. Si au lieu d'une circonférence c'étoit une ligne droite qu'il s'agit de faire toucher en un point donné *A*, (*fig.* 29), par un cercle passant par un point donné *B*, l'opération seroit la même, avec cette seule différence que la ligne *AC* seroit une perpendiculaire élevée au point *A* sur cette droite.

59. 4.° *Deux cordes parallèles* AB, CD, (*fig.* 30) *interceptent, entr'elles, des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire *GI* qu'on abaisseroit du centre *G* sur *AB*, doit (51) diviser, en deux parties égales, chacun des deux arcs *AIB*, *CID*, puisqu'elle sera, en même temps, perpendiculaire sur *AB*, et sur sa parallèle *CD* ; donc si des arcs égaux *AI*, *BI*, on retranche les arcs égaux *CI*, *DI*, les arcs restans *AC*, *BD*, doivent être égaux.

Concluons de là, que quand une tangente *HK* est parallèle à une corde *AB*, le point d'attouchement *I* est précisément au milieu de l'arc *AIB*.

60. Les propositions que nous avons établies (50, 57 et 58), ont leur application dans l'Architecture navale, ou la construction des navires; il y est souvent question d'arcs qui doivent se

toucher ou toucher des lignes droites, et passer par des points donnés. Ce que nous avons dit peut faciliter l'intelligence de quelques-unes des méthodes qu'on y prescrit. L'architecture civile fait aussi, assez souvent, usage d'arcs qui se touchent.

61. La derniere proposition que nous venons de démontrer peut, entre autres usages, servir à mener une parallele à une ligne donnée.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous nous proposons ici, n'est point de donner une nouvelle manière de les mesurer, mais d'établir quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN (fig. 31 et 32), *qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, ou par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* BFED *compris entre ses côtés.*

Menez par le centre C, le diamètre FH parallèle au côté AM, et le diamètre GE parallèle au côté AN, l'angle MAN (43) est égal à l'angle FCE; il aura donc la même mesure que celui-ci, qui a son sommet au centre, c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure l'arc FE; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc FE est la moitié de l'arc $BFED$. Or, BF est égal à AH (59), à cause des parallèles AM, HF; et à cause des parallèles AN et GE, l'arc ED est égal à AG; donc ED plus BF, valent AG plus

AH, c'est-à-dire *GH* ; mais *GH*, comme mesure de l'angle *GCH*, doit être égal à *FE*, mesure de l'angle *F E*, qui (20) est égal à *GCH* ; donc *BF* plus *DE*, valent *FE* ; donc *FE* est la moitié de *BFED* ; donc l'angle *MAN* a pour mesure la moitié de l'arc *BFED* qu'il comprend entre ses côtés.

Cette démonstration suppose que le centre soit entre les côtés de l'angle, ou sur l'un des côtés ; mais si le centre étoit hors des côtés, comme il arrive pour l'angle *MAL* (*fig.* 32), il n'en seroit pas moins vrai que cet angle auroit pour mesure la moitié de l'arc *BL* compris entre ses côtés. Car en imaginant la tangente *AN*, l'angle *BAL* vaut *LAN* moins *MAN*; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire, (puisque le centre est entre leurs côtés) la moitié de *LEA* moins la moitié de *BEA*, ou la moitié de *BL*.

64. Donc, 1.° *tous les angles* BAE, BCE, BDE (fig. 33) *qui ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés, le même arc ou des arcs égaux, seront égaux.* Car ils auront chacun pour mesure la moitié du même arc *BE* (63).

65. 2.° *Tout angle* BAC (fig. 34) *qui aura son sommet à la circonférence, et dont les côtés passeront par les extrémités d'un diamètre, sera droit ou de* 90 degrés; car il comprendra alors entre ses côtés la demi-circonférence *BOC*, qui est de 180 degrès ; et comme il doit en avoir la moitié pour mesure (63), il sera donc de 90 degrés.

66. La proposition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plusieurs autres usages, avoir les deux suivans.

67. 1.° *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (fig. 35), lorsqu'on ne peut prolonger assez cette ligne, pour exécuter commodément ce qui a été enseigné (35); voici le procédé :

D'un point *D* pris à volonté hors de la ligne *FB*, et d'une ouverture égale à la distance *DB*, décrivez la circonférence *ABCH* qui coupe *FB* en quelque point *A*; par ce point et par le centre *D*, tirez le diamètre *ADC*; du point *C* où ce diamètre coupe la circonférence, menez au point *B* la ligne *CB*, elle sera perpendiculaire à *FB*. Car l'angle *CBA* qu'elle forme avec *FB*, a son sommet à la circonférence, et ses côtés passent par les extrémités du diamètre *AC*; cet angle est donc droit (65); donc *CB* est perpendiculaire sur *FB*.

68. 2.° *Pour mener d'un point donné* E, (fig. 36), *hors du cercle ABD, une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre *C* et le point *E* par la droite *CE* : décrivez sur *CE*, comme diamètre, la circonférence *CAED* : elle coupera la circonférence *ABD*, en deux points *A* et *D*, par chacun desquels et par le point *E*, tirant les lignes *DE* et *AE*, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point *E* à la circonférence *ABD*.

Pour se convaincre que ces lignes sont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons *CD* et *CA*; les deux angles *CDE*, *CAE*, ont chacun leur sommet à la circonférence *ACDE*, et les deux côtés de chacun passent par les extrémités du diamètre *CE*; donc (65) ces angles sont droits; donc *DE* et *AE* sont perpendiculaires à l'extrémité des rayons *CD* et *CA*; donc (47) ces lignes sont tangentes en *D* et en *A*.

69. Si l'on prolonge le côté *BA* (*fig.* 31) indéfiniment vers *I*, on aura un angle *NAI* qui aura aussi son sommet à la circonférence; cet angle qui n'est point formé par deux cordes, mais seulement par une corde et par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour mesure la moitié de l'arc *AD* compris entre ses côtés, mais la moitié de la somme des deux arcs *AD* et *AB* soutendus par le côté *AD* et par le côté *AI* prolongé; car *DAI*

valant avec *DAB*, deux angles droits, ces deux angles doivent avoir ensemble pour mesure la moitié de la circonférence ; or, on vient de voir (63) que *DAB* avoit pour mesure la moitié de *DB* ; donc *DAI* a pour mesure la moitié de *AD* et la moitié de *AB*.

70. *Un angle* BAC (fig. 37), *qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* DE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point *D* où *CA* prolongé rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB*; l'angle *BAC* est égal à *FDC* (37), et aura par conséquent la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *FBC* (63), ou la moitié de *BC* plus la moitié de *BF*, ou, à cause que (59) *BF* est égal à *DE*, la moitié de *BC* plus la moitié de *DE*.

71. *Un angle* BAC (fig. 38), *qui a son sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ses côtés.*

Du point *D* où *CA* rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB*.

L'angle *BAC* est égal à *FDC* (37); il aura donc même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de *CF*, ou la moitié de *CB* moins la moitié de *FB*, ou (à cause que *BF* est (59) égal à *ED*) la moitié de *CB* moins la moitié de *ED*.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, si cet angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a nécessairement son sommet à la circonférence ; car s'il l'avoit ailleurs, les propositions démontrées (70 et 71)

feroient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour mesure. Donc, de quelque façon qu'on pose un même angle, si ses côtés (*fig.* 33) passent toujours par les mêmes points *B* et *E* de la circonférence, son sommet sera toujours sur quelque point de la circonférence. Donc, si deux règles *AM*, *AN* (*fig.* 39) fixément attachées l'une à l'autre roulent ensemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence d'un cercle qui passera par les deux points *B* et *C*.

Ceci peut servir, 1.° *à décrire un cercle qui passe par trois points donnés* B, A, C (*fig.* 39), *lorsqu'on ne peut approcher du centre.* Il faudra joindre le point *A* aux deux points *B* et *C* par deux règles *AM*, *AN* : Fixer ces deux règles de manière qu'elles ne puissent s'écarter l'une de l'autre; alors en faisant mouvoir l'angle *BAC* de manière que les règles *AM*, *AN* touchent toujours les points *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence demandée.

2.° *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés proposé, et qui passe par deux points donnés* B *et* C; ce qui peut être nécessaire dans la pratique.

Pour cet effet, on retranchera de 360 degrés, le nombre des degrés que cet arc doit avoir, et ayant pris la moitié du reste, on ouvrira les deux règles, de manière qu'elles fassent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux règles l'une à l'autre, et les faisant tourner autour de deux pointes fixées en *B* et *C*, l'arc *BAC* que le sommet décrira dans ce mouvement, sera du nombre de degrés proposé.

Il est facile de voir pourquoi on fait l'angle *BAC* égal à la moitié du reste; c'est qu'il a pour mesure la moitié de *B C* qui est la différence entre la circonférence entière et l'arc *BAC*.

Des lignes droites qui renferment un espace.

73 Le moindre nombre des lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace, est trois · et alors cet espace se nomme *triangle rectiligne* ou simplement *triangle*. *BAC* (fig. 42) est un triangle, parce que c'est un espace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'est une figure qui n'a que trois angles.

Il est évident que dans tout triangle, la somme de deux côtés, pris comme on le voudra, est toujours plus grande que le troisième. *AB* plus *BC*, par exemple, valent plus que *AC*, parce que *AC* étant la ligne droite qui va de *A* à *C*, est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle, dont les trois côtés sont égaux, se nomme triangle *équilatéral* (fig. 41).

Celui dont deux côtés seulement sont égaux, se nomme triangle *isoscèle* (*fig.* 42).

Et celui dont les trois côtés sont inégaux, se nomme triangle *scalène* (*fig.* 40).

74. *La somme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits ou* 180^d.

Prolongez indéfiniment le côté *AC* vers *E*(*fig.*40), et concevez la ligne *CD* parallèle au côté *AB*.

L'angle *BAC* est égal à l'angle *DCE* (37), puisque les lignes *AB* et *CD* sont parallèles. L'angle *ABC* est égal à l'angle *BCD* par la seconde propriété des parallèles (38) ; donc les deux angles *BAC* et *ABC* valent ensemble autant que les deux angles *BCD* et *DCE*, c'est-à-dire, autant que l'angle *BCE* ; mais *BCE* est supplément (17 et 19) de *BCA* ; donc les deux angles *BAC* et *ABC* forment ensemble le supplément de *BCA* ; donc ces trois angles valent ensemble 180^d.

75. La démonstration que nous venons de donner, prouve donc en même temps que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC, *vaut la somme des deux intérieurs* BAC et ABC, *qui lui sont opposés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74) ; 1.° *qu'un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit :* et alors on l'appelle *triangle rectangle* (*fig.* 43).

2.° Qu'à plus forte raison *il ne peut avoir qu'un seul angle qui soit obtus ;* dans ce cas on l'appelle *triangle obtusangle* (*fig.* 44).

3.° Mais *il peut avoir tous ses angles aigus ;* et alors il est dit *triangle acutangle* (*fig.* 45).

4.° Que *connoissant deux angles ou seulement la somme de deux angles d'un triangle, on connoît le troisième angle*, en retranchant de 180^d, la somme des deux angles connus.

5.° Que *lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de chacun est nécessairement égal ;* puisque les trois angles de chaque triangle valent 180^d.

6.° Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont toujours complément* (21) *l'un de l'autre.* Car dès que l'un des angles du triangle est de 90^d, il ne reste plus que 90^d pour les deux autres ensemble.

76. Nous avons vu ci-dessus (54) qu'on pouvoit toujours faire passer une circonférence de cercle, par trois points qui ne sont pas en ligne droite ; concluons-en que. . . . .

On peut toujours faire passer une circonférence de cercle, par les sommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonscrire un cercle à un triangle.*

77. De là il est aisé de conclure, 1.° que *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux ;* et réciproquement *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.*

Car en faisant passer une circonférence par les trois angles *A*, *B*, *C* (*fig.* 48), si les angles *ABC*, *ACB*, sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB*, dont les moitiés leur servent de mesure (63), seront néces-sairement

sairement égaux ; donc (7) les cordes *AC*, *AB* seront égales. Et réciproquement, si les côtés *AC*, *AB* sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB* seront égaux ; donc les angles *ABC*, *ACB*, qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et valent, par conséquent, chacun le tiers de 180^{d} ou 60^{d}.

78. 2.° *Dans un même triangle* ABC (*fig.* 47); *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement.*

Car si l'angle *ABC* est plus grand que l'angle *ACB*, l'arc *AC* sera plus grand que l'arc *AB*, et par conséquent la corde *AC* plus grande que la corde *AB*. La réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considère ; il est donc à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnoître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Que l'angle *B* du triangle *BAC* (*fig.* 48), soit égal à l'angle *E* du triangle *EDF* (*fig.* 49.); que le côté *AB* soit égal au côté *DE*, et le côté *BC* égal au côté *EF* ; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure *ABC* appliquée sur la figure *DEF*, de manière que le côté *AB* soit exactement

appliqué sur son égal DE; puisque l'angle B est égal à l'angle E, le côté BC tombera sur EF; et le point C tombera sur le point F, puisque BC est supposé égal à EF. Le point A étant sur D, et le point C sur F, il est donc évident que AC s'applique exactement sur DF, et que par conséquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc pour construire un triangle dont on connoîtroit deux côtés et l'angle compris, on tirera (*fig.* 49) une igne DE égale à l'un des côtés connus: sur cette ligne on era (14) un angle DEF égal à l'angle connu, et ayant ait EF égal au second côté connu, on tirera DF, ce qui achévera le triangle demandé.

81. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté egal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (*fig.* 48) soit égal au côté DE (*fig.* 49), l'angle B égal à l'angle E, et l'angle A égal à l'angle D.

Concevez le côté AB appliqué exactement sur le côté DE; BC se couchera sur EF, puisque l'angle B est égal à l'angle E; pareillement, puisque l'angle A est égal à l'angle D r côté AC se couchera sur DF; donc AC et BC se rencontreront au point F; donc les deux triangles sont égaux.

Donc pour construire un triangle, dont on connoîtroit un côté et les deux angles adjacens, on tirera (*fig.* 49), une ligne DE égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles E et D égaux aux deux angles connus; alors les côtés EF, DF de ces angles termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La proposition (81) peut servir à démontrer que les *parties* AC, BD (*fig.* 50) *de deux parallèles interceptées entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales.*

Abaissez les deux perpendiculaires AE, BF; les angles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils sont droits; et à cause des parallèles AC et BD, AE et BF, l'angle EAC est égal à l'angle FBD (43). D'ailleurs AE est égal à BF (36); donc les deux triangles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AC est égal à BD.

On démontrera de même, que si AC est égal et parallèle à BD, AB sera égal et parallèle à CD; car outre le côté AC égal à BD, et l'angle droit en E ainsi qu'en F, l'angle ACE sera égal à BDF; puisque AC est parallèle à BD (37); donc (75) le troisième angle EAC sera égal au troisième angle DBF; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc AE est égal à BF, et par conséquent les deux lignes sont parallèles; or de là et de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'ensuit que AB est égal à CD.

83. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (*fig.* 48), soit égal au côté DE, (*fig.* 49) le côté BC, égal au côté EF, et le côté AC, égal au côté DF.

Concevez le côté AB exactement appliqué sur DE, et le plan BAC couché sur le plan de la figure DEF; je dis que le point C tombe sur le point F.

Décrivez des points D et E comme centres, et des rayons DF et EF, les deux arcs IK et HG qui se coupent en F; il est évident que le point C doit tomber sur quelque point de IK, puisque AC est égal à DF; par une semblable raison le point

C doit tomber sur quelque point de *GH*, puisque *BC* est égal à *EF*; il doit donc tomber sur le point *F* qui est le seul point commun que ces deux arcs puissent avoir d'un même côté de *DE*; donc les deux triangles conviennent parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Donc pour construire un triangle dont on connoîtroit les trois côtés, il faut (*fig.* 49) tirer une droite *DE* égale à l'un des cotés connus; du point *D* comme centre, et d'un rayon égal au second côté connu, décrire l'arc *IK*; pareillement du point *E*, comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté connu, décrire l'arc *GH*: enfin, du point d'intersection *F*, tirer aux points *D* et *E*, les droites *FD* et *FE*.

Des Polygones.

84. Une figure de plusieurs côtés, s'appelle en général un *Polygone.*

Lorsqu'elle a trois côtés; on l'appelle,

....	*Triangle* on *Trilatère.*
Lorsqu'elle en a 4............	*Quadrilatère.*
5............	*Pentagone.*
6............	*Hexagone.*
7............	*Heptagone.*
8............	*Octogone.*
9............	*Enneagone.*
10............	*Décagone.*

Nous n'étendrons pas davantage la liste de ces noms, parce qu'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différens noms, dont le grand nombre chargeroit assez inutilement la mémoire; nous n'exposons ceux-ci que parce qu'ils se rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant*, celui dont le sommet est hors de la figure; la *figure* 51 a tous ses angles saillans.

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le sommet entre dans la figure ; l'angle *CDE* (*fig.* 52) est un angle rentrant.

On appelle *diagonale*, une ligne tirée d'un angle à un autre, dans une figure quelconque. *AD*, *AC* (*fig.* 51) sont des diagonales.

85. *Tout polygone peut être partagé par des diagonales menées d'un de ses angles, en autant de triangles moins deux, qu'il a de côtés.*

L'inspection des *fig.* 51 *et* 52, suffit pour faire sentir que cela est vrai généralement.

86. Donc *pour avoir la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180^d^, *autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.*

Car il est évident que la somme des angles intérieurs des polygones *ABCDE* (*fig.* 51), et *ABCDEF* (*fig.* 52), est la même que celle des angles des triangles *ABC*, *ACD*, etc. Or la somme des trois angles de chacun de ces triangles est de 180 degrés ; il faut donc prendre 180 degrés autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire, (85) autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

REMARQUE. Dans la figure 52, l'angle *CDE*, pour être compris dans la proposition précédente, doit être compté, non pas pour la partie *CDE* extérieure au polygone, mais pour la partie *CDE* composée des angles *ADE*, *ADC* ; c'est un angle de plus de 180°, et qu'on ne doit pas moins considérer comme angle, que tout autre angle au-dessous de 180°. Car un angle n'est en général (10) que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe ; et

soit qu'elle tourne de plus ou de moins que 180°; la quantité dont elle a tourné est toujours un angle.

87. *Si l'on prolonge, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme de tous les angles extérieurs vaudra 360 degrés, quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* Voyez (*fig.* 51).

Car chaque angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur qui lui est contigu; ainsi les angles, tant intérieurs qu'exterieurs, valent autant de fois 180 degrés qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne diffèrent de cette somme, que de deux fois 180 degrés ou 360 degrés; il reste donc 360 degrés pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier*, celui qui a tous ses angles égaux, et tous ses côtés égaux. *Voyez* (*fig.* 54).

Il est donc toujours facile de savoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car ayant trouvé par la proposition enseignée (86) combien valent ensemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviser cette valeur totale, par le nombre des côtés; par exemple, si l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier; comme il y a 5 côtés, je prends 180 degrés, 5 fois moins deux, c'est-à-dire, 3 fois; ce qui donne 540 degrés pour la valeur des 5 angles intérieurs; donc, puisqu'ils sont tous égaux, chacun doit valoir la cinquième partie de 540 degrés, c'est-à-dire, 108 degrés.

89. De la définition du polygone régulier, il suit qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle, par tous les angles d'un polygone régulier.*

Car il est prouvé (54) qu'on peut faire passer une

circonférence de cercle par les trois points A, B, C (*fig.* 53); or je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté CD; en effet, il est facile de prouver que le point D, où cette circonférence doit rencontrer le côté CD, est éloigné de C d'une quantité égale à BC; car l'angle ABC étant égal à BCD, les arcs AEC, BFD, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (63), doivent être égaux; retranchant de chacun l'arc commun $AFED$, les arcs restans CD et AB, doivent être égaux; donc aussi (7) les cordes CD et AB sont égales; donc le point D, où le côté CD est rencontré par la circonférence qui passe par A, B, C, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles E et F.

90. On voit donc que pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question se réduit à faire passer un cercle par les sommets de trois de ses angles; ce qui se fait de la manière enseignée (54).

91. *Toutes les perpendiculaires abaissées du centre d'un polygone régulier, sur les côtés, sont égales.* Car ces perpendiculaires OH, OL devant tomber sur le milieu de chaque côté (52), les lignes AH et AL seront égales; or AO est commun aux deux triangles OHA et OLA; d'ailleurs, à cause des triangles ABO, AOF qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles OAH, OAL, sont égaux; donc les deux triangles OAH, OAL, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (80). Donc OH est égal à OL.

Donc, si d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence est dite *inscrite* au polygone.

Les perpendiculaires OH, OL s'appellent, chacune, l'*apothême* du polygone.

92. Il est clair que si du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entr'elles des angles égaux, puisque ces angles auront pour mesure des arcs qui sont soutendus par des cordes égales; donc *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser* 360 *degrés par le nombre des côtés*. Car ces angles égaux ont tous ensemble pour mesure la circonférence entière. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre sera la sixième partie de 360 degrés; c'est-à-dire, sera de 60 degrés.

93. Donc *le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle circonscrit*. Car en tirant les rayons AO et BO, le triangle AOB sera isocèle, et par conséquent (77) les deux angles BAO et ABO seront égaux; or comme l'angle AOB est de 60 degrés, les deux autres doivent valoir ensemble 120 degrés (75); donc chacun d'eux est de 60 degrés; les trois angles sont donc égaux, et par conséquent le triangle est équilatéral (77); donc AB est égal au rayon AO.

94. Nous n'en dirons pas davantage sur les polygones réguliers, dont les autres propriétés sont d'ailleurs très-faciles à déduire de celles qu'on vient d'exposer; la seule chose que nous ajouterons, est l'usage de la derniere proposition pour la division de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diamètres AB, DE (*fig.* 54) perpendiculaires l'un à l'autre, et ayant pris une ouverture de compas égale au rayon CE, on la portera successivement de E en F, et de A en G; le quart de circon-

férence AE sera, par ce moyen, divisé en trois parties égales AF, FG, GE; car puisqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il suit de ce qui vient d'être dit (93), que l'arc EF est de 60 degrés; or EA est de 90 degrés, donc AF est de 30 degrés. Par la même raison AG est de 60 degrés; et comme AE est de 90 degrés, GE est donc de 30 degrés; enfin, si de l'arc total AE de 90 degrés, vous retranchez les arcs AF et GE, qui valent ensemble 60 degrés, l'arc restant FG sera de 30 degrés. Ayant ainsi divisé le quart de circonférence en arcs de 30 degrés, il sera facile d'avoir l'arc de 15 degrés, en divisant en deux parties égales, chacun des arcs AF, FG, GE par la méthode donnée (53). On fera les mêmes opérations sur chacun des trois autres quarts AD, DB et BE.

Si on vouloit conduire cette division jusqu'à l'arc de 1 degré, il faudroit y aller par tâtonnement; car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement jusqu'à l'arc de 3 degrés; mais comme les propositions qui y conduisent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons seulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce sont celles dans lesquelles la chose dont il s'agit, peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la règle et le compas seuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matière sur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propositions sur les proportions, qui sont une suite immédiate de ce que nous avons enseigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le discours, nous conviendrons pour l'avenir, que lorsque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce signe $+$, qui équivaudra au mot *plus*; ainsi $4+3$ signifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement pour marquer la soustraction, nous nous servirons de ce signe $-$, qui équivaudra au

mot *moins* ; ainsi $5-2$ signifiera 5 moins 2 ; ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'est pas toujours question de faire réellement les opérations, mais de raisonner sur des circonstances de ces opérations, il est souvent plus utile de les représenter, que d'en donner le résultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous servirons de ce signe $\times$, qui équivaudra à ces mots *multiplié par ;* ainsi 5×4, signifiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la division, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende et le diviseur en forme de fraction dont le dividende sera numérateur, et le diviseur, dénominateur ; ainsi $\frac{12}{7}$ marquera 12 divisé par 7.

Cela posé, nous avons vu (*Arith.* 185) que dans toute proportion, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent ; et qu'il en est de même de la différence des antécédens comparée à celle des conséquens.

96. Nous pouvons donc conclure de là, que *dans toute proportion la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens ;* car puisque dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, par exemple, on a (*Arith.* 185),

$$48 + 12 : 16 + 4 :: 12 : 4,$$
$$\text{et } 48 - 12 : 16 - 4 :: 12 : 4.$$

il est évident (à cause du rapport commun de $12 : 4$) qu'on peut conclure $48 + 12 : 16 + 4 :: 48 - 12 : 16 - 4$. Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant, dans cette der-

nière proportion, le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième, ce qui est permis (*Arith.* 182), dire aussi, que *la somme des antécédens, est à leur différence, comme la somme des conséquens, est à leur différence.*

98. Si dans la proportion 48 : 16 :: 12 : 4 on échange les places des deux moyens, ce qui donnera 48 : 12 :: 16 : 4, et qu'on applique à celle-ci la proportion qu'on vient de démontrer (96); on aura 48 + 16 : 12 + 4 :: 48 — 16 : 12 — 4, qui à l'égard de la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, fournit cette proposition, *La somme des deux premiers termes d'une proportion, est à la somme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers, est à la différence des deux derniers;* ou (en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième) *la somme des deux premiers termes, est à leur différence, comme la somme des deux derniers, est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composans, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.*

Par exemple, dans le rapport de 6 × 10 : 2 × 5, on peut, au lieu des facteurs 6 et 2 substituer 3 et 1, ce qui donnera le rapport composé 3 × 10 : 1 × 5 qui est le même que le rapport 6 × 10 : 2 × 5. En effet, puisque 6 : 2 :: 3 : 1, on peut, sans changer cette proposition (*Arith.* 183), multiplier les antécédens par 10 et les conséquens par 5, et alors on aura 6 × 10 : 2 × 5 :: 3 × 10 : 1 × 5.

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux, ou un plus grand nombre de proportions sont telles que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'autre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à conséquent; par exemple, si on a les deux proportions

$$6 : 4 :: 12 : 8$$
$$4 : 3 :: 20 : 15$$

on pourra conclure $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Car quand on admettroit le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3 qu'on auroit alors, ne différeroit pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.* 170) que l'on a en omettant ce facteur.

De même si on a $6 : 4 :: 12 : 8$
$$4 : 3 :: 20 : 15$$
$$3 : 7 :: 21 : 49$$

on en conclura $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$.

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, et par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé; parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, et qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Nous allons, maintenant, transporter aux lignes les connoissances que nous avons tirées des nombres, sur les proportions. Mais pour rendre nos démonstrations plus courtes et plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particulière à ces lignes, sinon dans quelques applications; au reste on peut toujours s'aider par des comparaisons avec des nombres.

Les rapports que nous considérons ici, sont les rapports géométriques. Ainsi quand nous dirons, une telle ligne est à une telle ligne, comme 5 est à 4, par exemple, on doit entendre que la première contient la seconde, autant que 5 contient 4.

101. *Si sur un des côtés* AZ *d'un angle quelconques* ZAX (*fig.* 55), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, etc. *de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra ; et si après avoir tiré à volonté, par l'un* F, *des points de division, la ligne* FL *qui rencontre le côtés* AX *en* L, *on mène par les autres points de division les lignes* BG, CH, DI, EK etc. *parallèles à* FL *je dis que les parties* AG, GH, HI, etc. *du côté* AX, *seront aussi égales entr'elles.*

Menons par les points G, H, I, *etc.* les lignes GM, HN, IO *etc.* parallèles à AZ ; les triangles ABG, GMH, HNI, IOK, *etc.* seront tous égaux entr'eux ; car 1.° les lignes GM, HN, IO, *etc.* sont, chacune, égales à CB, puisque (82) elles sont égales à BC, ND, DE, *etc.* 2.° les angles GMH, HNI, IOK, *etc.* sont tous égaux entr'eux, puiqu'ils sont tous égaux à l'angle ABG (43) : 3.° les angles MGH, NHI, OIK, *etc.* sont tous égaux entr'eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle BAG (43).

Tous les triangles BAG, MGH, NHI, *etc.* ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; ils sont donc tous égaux ; donc les côtés AG, GH, HI, *etc.* de ces triangles, sont tous égaux entr'eux ; donc la ligne AX est, en effet, divisée en parties égales par les parallèles.

Il est donc évident que si AB est telle partie que ce soit de AG, BC sera une semblable partie de GH, CD sera une semblable partie de HI ; si, par

exemple, AB est les $\frac{2}{3}$ de AG, BC sera les $\frac{2}{3}$ de GH, et ainsi de suite.

Il en sera de même de 2, 3, 4, etc. parties de AF comparées à 2, 3, 4, parties de AL; donc une portion quelconque AD ou DF de la ligne AF, est même partie de la portion correspondante AI ou IL de la ligue AL, que AB l'est de AG: c'est-à-dire, que. . . . .

$$AD : AI :: AB : AG,$$
$$\text{et } DF : IL :: AB : AG.$$

On peut dire de même, que AF : AL :: AB : AG.

Donc (à cause du rapport de AB : AG, commun à ces trois proportions) on peut dire que

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\text{et } AD : AI :: AF : AL.$$

102. *Donc si par un point* D (fig. 56) *pris à volonté sur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une ligne* DI *parallèle au côté* FL, *les deux côtés* AF, AL *seront coupés proportionnellement*, c'est-à-dire, qu'on aura toujours

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\text{et } AD : AI :: AF : AL;$$

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.* 171),

$$AD : DF :: AI : IL,$$
$$\text{et } AD : AF :: AI : AL,$$

quelque soit d'ailleurs l'angle FAL.

En effet on peut toujours concevoir le côté *AF* coupé en tel nombre de parties égales qu'on

voudra, et par conséquent en un nombre infini de parties égales : or dans ce cas le point D ne pouvant manquer d'être un des points de division, le raisonnement de l'article précédent s'applique ici mot à mot.

103. Donc, 1.° *Si d'un point* A *pris à volonté hors de la ligne* GL (fig. 57), *on tire à différens points de cette ligne, plusieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *toute parallèle* BF *à la ligne* GL, *coupera toutes ces lignes, en parties proportionnelles*, c'est-à-dire, qu'on aura....

AB : BG :: AC : CH :: AD : DI :: AE : EK :: AF : FL
et AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL.

Car en considérant successivement les angles GAH, GAI, GAK, GAL, comme on fait l'angle FAL dans la *figure* 56, on démontrera de la même manière, que tous ces rapports sont égaux.

104. 2.° *La ligne* AD (fig. 56 *) *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC, *en deux parties* BD, DC, *proportionnelles aux côtés correspondans* AB, AC ; *c'est-à-dire, de manière qu'on a* BD : DC :: AB : AC.

Car si par le point B on mene BE parallèle à AD, et qui rencontre CA prolongé en E, les lignes CE, CB étant alors coupées proportionnellement (102), on aura BD : CD :: AE : AC.

Or il est facile de voir que AE est égal à AB; car à cause des parallèles AD et BE, l'angle E est égal à l'angle DAC (37), et l'angle EBA est égal à son alterne BAD (38) ; donc puisque DAC et BAD sont égaux comme étant les moitiés de BAC, les angles E et EBA seront égaux; donc

les côtés AE et AB sont aussi égaux; donc la proportion BD : CD : : AE : AC, se change en celle-ci BD : CD : : AB : AC.

105. *Si on coupe les lignes* AF *et* AL (fig. 56), *proportionnellement aux points* D *et* I, *c'est-à-dire*, *de manière* que AF : AD : : AL : AI, la ligne DI *sera parallèle à* FL.

Car la partie de *AL* que couperoit la parallèle menée du point *D*, doit (102) être contenue dans *AL*, autant que *AD* l'est dans *AF*; or, par la supposition, *AI*, est contenue dans *AT* précisément ce même nombre de fois; donc cette partie ne peut être autre que *AI*.

106. Donc *si on coupe proportionnellement, aux points* B, C, D, E, F (fig. 57) *les lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différens points de la ligne* GL, *la ligne* BCDEF *qui passera par tous ces points, sera une ligne droite parallèle à* GL.

107. Les propositions enseignées, (102 *et suiv.*) sont également vraies, lorsque la ligne *BF*, au lieu d'être entre le point *A* et la ligne *GL*, comme dans la *figure* 57, tombe au-delà du point *A* comme dans la *figure* 58. Car tout ce qui a été dit de la *figure* 55, et qui sert de base aux propositions établies (102 *et suiv.*), auroit également lieu pour les parallèles qui couperoient *ZA* et *XA* prolongées, dans la *figure* 55.

De la similitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou en général, de deux figures semblables, ceux

ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, et sont, par conséquent, semblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (fig. 59 et 60), sont tels que l'angle *A* du premier soit égal à l'angle *A* du second, l'angle *D* égal à l'angle *F*, et l'angle *I* égal à l'angle *L*, je dis qu'on aura *AD* : *AF* : : *AI* : *AL* : : *DI* : *FL*.

Car puisque l'angle *A* du premier est égal à l'angle *A* du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un sur l'autre de la manière représentée dans la *figure* 56; alors puisque l'angle *D* est égal à l'angle *F*, les lignes *DI* et *FL* seront parallèles (42); donc, selon ce qui a été dit (102), on aura *AD* : *AF* : : *AI* : *AL*.

Tirons maintenant par le point *I*, la droite *IH* parallèle à *AF*; selon ce qui a été dit (102), on voit que *AI* : *AL* : : *FH* : *FL*, ou, à cause que *FH* est égal à *DI* (82) : : *DI* : *FL*; donc *AD* : *AF* : : *AI* : *AL* : : *DI* : *FL*.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire aussi *AD* : *AI* : : *AF* : *AL*, *et AI* : *DI* : : *AL* : *FL*.

110. Puisque (74) lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle est nécessairement égal au troisième angle, concluons-en que *deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés parallèles, et qui sont tournés d'un même

côté, sont égaux; donc *deux triangles qui ont les côtés parallèles, ont les angles égaux chacun à chacun, et ont, par conséquent* (109) *les côtés proportionnels.*

Donc aussi *deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car si on fait faire un quart de révolution à l'un de ses triangles, ses côtés deviendront parallèles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 43), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypothénuse); 1.° *les deux triangles* ADB, ADC, *seront semblables entr'eux et au triangle* BAC. 2.° *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *et* DC *de l'hypothénuse.* 3.° *Chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit, sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment correspondant* BD *ou* DC.

Car les deux triangles ADB, ADC, ont chacun un angle droit en D, comme le triangle BAC, en a un en A; d'ailleurs ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle BAC puisque l'angle B appartient tout à-la-fois au triangle ADB et au triangle BAC; pareillement l'angle C appartient tout à-la-fois au triangle ADC et au triangle BAC; donc (110) ces trois triangles sont semblables. Donc, comparant les côtés homologues des deux triangles ADB et ADC, on aura

$$BD : AD :: AD : DC;$$

comparant les côtés homologues des deux triangles ADB et BAC, on aura

$$BD : AB :: AB : BC ;$$

enfin comparant les côtés homologues des triangles *ADC* et *BAC*, on aura

$$CD : AC :: AC : BC ,$$

où l'on voit que *AD* est (*Arith.* 174) moyenne proportionnelle entre *BD* et DC ; *AB* moyenne proportionnelle entre *BD* et *BC* ; et enfin *AC* moyenne proportionnelle entre CD et *BC*.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, et sont, par conséquent, semblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*fig.* 59 et 60) sont tels que l'angle *A* du premier soit égal à l'angle *A* du second, et qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles, soient tels qu'on ait $AD : AF :: AI : AL$, je dis qu'ils seront semblables ; c'est-à-dire, qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, et leurs troisièmes côtés *DI* et *FL* en même rapport que *AD* et *AF*, ou que *AI* et AL.

Car on peut appliquer l'angle A du triangle DI sur l'angle A du triangle AFL, de la manière représentée par la *figure* 56. Or puisqu'on suppose que $AD : AF :: AI : AL$, les deux droites AF et AL sont donc coupées proportionnellement aux points D et I ; donc DI est parallèle à EL (106); donc (37) l'angle AFL est égal à l'angle *ADI*, et l'angle *ALF* égal à l'angle *AID*.

De là et de ce qui a été dit (109), il suit que $DI : FL :: AD : AF :: AI : AL.$

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, et sont, par conséquent, semblables.*

Si on suppose (*fig.* 61 et 62) que *DE* : *AB* :: *EF* : *BC* : : *DF* : *AC*, je dis que l'angle *D* est égal à l'angle *A*, l'angle *E* égal à l'angle *B*, et l'angle *F* égal à l'angle *C*.

Imaginons qu'on ait construit sur *DE*, un triangle *DGE*, dont l'angle *DEG* soit égal à l'angle *B*, et l'angle *GDE* à l'angle *A*; le triangle *DEG* sera semblable au triangle *ABC* (110); donc (109) *DE* : *AB* : : *GE* : *BC* : : *DG* : *AC*; mais par la supposition, on a *DE* : *AB* : : *EF* : *BC* : : *DF* : *AC*; donc à cause du rapport commun de *DE* : *AB*, on aura ces deux proportions :

GE : *BC* : : *EF* : *BC*
et *DG* : *AC* : : *DF* : *AC*.

Donc puisque les deux conséquens sont égaux entr'eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédens seront aussi égaux entr'eux; donc *GE* est égal à *EF*, et *DG* égal à *DF*. Le triangle *DEG* a donc ses trois côtés égaux à ceux du triangle *DEF*; il est donc (83) égal à ce triangle *DEF*; or on vient de voir que le triangle *DEG* est semblable à *ABC*, donc *DEF* est aussi semblable à *ABC*.

115. Nous avons prouvé ci-dessus (111) que quand la ligne *DI* (*fig.* 56), est parallèle au côté *FL*, les deux triangles *ADI* et *AFL*, sont semblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puisse être l'angle *A*, on doit donc conclure (*fig.* 57) que les triangles *AGH*, *AHI*, *AIK*, *AKL*, sont sem-

blables aux triangles *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF*, chacun à chacun, et que par conséquent (109) *KL* : *EF* : : *AK* : *AE* : : *KI* : *DE* : : *AI* : *AD* : : *IH* : *CD* : : *AH* : *AC* : : *GH* : *BC*; donc, en ne tirant de cette suite de rapports, que ceux qui renferment des parties des lignes *GL* et *BF*, on aura *KL* : *EF* : : *KI* : *DE* : : *IH* : *CD* : : *GH* : *BC*; c'est-à-dire, que *si d'un point* A, *on tire à différens points d'une ligne droite* GL, *plusieurs autres lignes droites, ces lignes couperont toute parallèle à* GL, *de la même manière qu'elles coupent* GL, *c'est-à-dire, en parties qui auront entr'elles les mêmes rapports que les parties correspondantes de* GL.

116. Les principes que nous venons d'exposer, sont la base de toutes les parties des Mathématiques théoriques ou pratiques. Comme il importe de se rendre ces principes familiers, nous insisterons un peu sur leur usage, tant par cette vue, que parce que cela nous fournira l'occasion d'expliquer plusieurs pratiques utiles.

117. La proposition enseignée (101) fournit un moyen bien naturel de diviser une ligne donnée en parties égales, ou en parties qui aient entr'elles des rapports donnés. Supposons que *AR* (*fig.* 55) soit une ligne qu'on veut diviser en deux parties qui aient entr'elles un rapport donné, par exemple, celui de 7 à 3; on tirera par le point *A*, et sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie *AZ*, et ayant pris arbitrairement une ouverture de compas *AB*, on la portera dix fois le long de *AZ*; je suppose que *Q* soit l'extrémité de la dernière partie; on joindra les extrémités *Q* et *R* de la ligne *AQ*, et de la ligne donnée *AR*; alors si par le point *D*, extrémité de la troisième division, on tire *DI* parallèle à *QR*, la ligne *AR* sera divisée en deux parties *RI* et *AI*, qui seront entr'elles : : 7 : 3; car (101 *et* 102) elles sont entr'elles : : *DQ* : *AD*, que l'on a faites de 7 et de 3 parties.

On voit par-là que si l'on vouloit diviser la ligne *AR* en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 5 parties,

qui fussent entr'elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2, on ajouteroit tous ces nombres entr'eux, ce qui donneroit 21; on porteroit vingt-une ouvertures de compas sur la ligne *AZ*, et on tireroit des parallèles à la ligne *QR*, par les extrémités de la 7e, 5e, 4e, 3e, 2e division.

118. Si les rapports étoient donnés en lignes, on mettroit toutes ces lignes bout-à-bout sur la ligne *AZ*.

On voit donc ce qu'il y auroit à faire, si l'on vouloit diviser la ligne *AR* en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser, doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les parallèles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties; c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

119. *fg* (*fig.* 63) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6, par exemple : on tirera une ligne indéfinie *BC*, sur laquelle on portera 6 fois de suite une même ouverture de compas, arbitraire : soit *BC* la ligne qui comprend ces six parties, on décrira sur *BC* un triangle équilatéral *BAC*, en décrivant des deux points *B* et *C* comme centres, et de l'intervalle *BC* comme rayon, deux arcs qui se coupent en *A*. Sur les côtés *AB*, *AC*, on prendra les parties *AF*, *AG* égales chacune à *fg*; et ayant tiré *FG*, cette ligne sera égale à *fg*; on mènera du point *A* à tous les points de division de *BC*, des lignes droites, qui coupent *FG* de la même manière que *BC* est coupée.

Car ces lignes *AF*, *AG*, étant égales entr'elles, et les lignes *AB*, *AC*, aussi égales entr'elles, on a *AB* : *AF* : : *AC* : *AG*; donc *AB*, *AC* sont coupées proportionnellement en *F* et *G*; donc *FG* est parallèle à *BC*, et par conséquent (111) le triangle *FAG* est semblable à *ABC*; donc *FAG* est équilatéral; donc *AG* est égal à *AF*, et par conséquent à *fg*; de plus *FG* étant parallèle à *ABC*, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point *A* à la droite *BC*.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former et à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure, du grand au petit; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle échelle de *dixme* : voici comment elle se construit. Aux extrémités *A* et *B* de la ligne *AB* (*fig.* 64)

qu'on veut diviser en 100 parties, on élève les perpendiculaires *AC*, *BD* sur chacune desquelles on porte dix ouvertures de compas égales entr'elles, mais de grandeur arbitraire; ayant tiré *CD*, on divise *AB* en 10 parties, et on porte ces parties sur *CD*, après quoi on tire des transversales, comme on le voit dans la figure; et par les points de division correspondans de *CA* et de *BD*, on tire des lignes droites qui sont autant de parallèles à *AB*; alors on est dans le même cas que si l'on avoit divisé *AB* en 100 parties; si l'on veut, par exemple, avoir 47 parties dont *AB* en contient 100, je prends sur la ligne qui passe au n.° 7, la partie 7, *H* depuis *CA* jusqu'à la transversale qui passe par le n.° 40, et ainsi pour tout autre nombre.

En effet, à cause des triangles semblables *C7v*, *CAx*, il est évident que *7v* contient 7 parties dont *Ax* en contiendroit 10; donc puisque *vH* contient 4 intervalles égaux à *Ax*, la ligne entière *7H* vaut 47 parties dont *Bx* en contiendroit 10; c'est-à-dire, 47 parties dont *AB* en contiendroit 100.

120. La proposition démontrée (102) peut servir à *trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* ab, cd, ef (*fig.* 56); c'est-à-dire, une ligne qui soit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient *ab*, *cd*, *ef*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies *AF*, *AL* qui fassent entr'elles tel angle qu'on voudra, on portera *ab* de *A* en *D*, et *cd* de *A* en *F*; on portera pareillement *ef* de *A* en *I*: et ayant joint les deux points *D* et *I* par la droite *DI*, on menera par le point *F* la ligne *FL* parallèle à *DI* qui déterminera *AL* pour la quatrième proportionnelle cherchee.

On peut aussi, en vertu de la proposition enseignée (109), s'y prendre de cette autre manière. Prendre sur une ligne indéfinie *AF* (*fig.* 56), les deux parties *AD*, *AF* égales à *ab*, *cd* respectivement; et ayant tiré *DI* égale à *ef*, et sous tel angle qu'on voudra, on tirera par le point *A* et le point *I*, la droite *AL* que l'on coupera par une ligne *FL* parallèle à *DI*; cette parallèle sera le quatrième terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, le quatrième terme s'appelle alors *troisième proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainsi quand on demande une troisième proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre

qu'on demande le quatrième terme d'une proportion ; dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, et l'opération est la même que celle qu'on vient d'enseigner.

121. Les propositions enseignées (100, 113 et 114) peuvent servir à résoudre ce problème général ; *Etant données trois des six choses* (angles et côtés) *qui entrent dans un triangle, trouver les trois autres, pourvu que parmi les trois choses connues il y ait un côté.*

Nous allons en donner quelques exemples.

Supposons qu'étant au point *B* (*Fig.* 65.) dans la campagne, on veut savoir quelle distance il y a de ce point *B* à un objet *A* dont on ne peut approcher.

On plantera un piquet à une certaine distance *BC* que l'on mesurera, et qu'on fera à peu-près égale à *BA* estimée grossièrement. Puis avec le graphometre que nous avons décrit (23) on mesurera les angles *ABC*, *ACB* que font avec la ligne *BC* les deux lignes qu'on imaginera aller de ses extrémités au point *A*. Cela posé, on tirera sur le papier une ligne *bc* (*Fig.* 66) qu'on fera d'autant de parties d'une échelle que l'on construira arbitrairement, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de pieds dans *CB*, si l'on a mesuré en pieds ; et avec le rapporteur décrit (22), on fera au point *b*, un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle *B* ; et au point *c* un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle *C* ; alors les deux lignes *ab*, *ac* se rencontreront en un point *a* qui représentera le point *A* : en sorte que si vous mesurez *ab* sur votre échelle, le nombre de parties que vous lui trouverez, sera le nombre de pieds que contient *AB*. Car les deux angles *b* et *c*, ayant été faits égaux

aux deux angles *B C*, le triangle *bac* est semblable au triangle *BAC* (110), et par conséquent leurs côtés sont proportionnels.

C'est ainsi qu'on peut mesurer la distance d'une Isle à une Côte, lorsque l'on peut observer cette Isle de deux points de cette Côte, dont la distance seroit connue.

122. Par la proposition démontrée (114) on peut se dispenser de mesurer les angles, dans le cas dont nous venons de parler. En effet, il suffit, après avoir planté un piquet en un point *E* (*Fig.* 65) qui soit sur l'alignement des points *A* et *B*, et un autre en un point *F* qui soit sur l'alignement des deux points *A* et *C*, il suffit, dis-je, de mesurer les lignes *BC*, *BE*, *CE*, *BF* et *CF*; alors on fera un triangle *bec* (*Fig.* 66) dont les côtés *bc*, *be*, *ce* aient autant de parties d'une même échelle, que *BC*, *BE*, *CE* ont de pieds; on fera de même sur *bc* un autre triangle *bcf* dont les côtés *bf*, *cf*, aient autant de parties de l'échelle, que *BF* et *CF* ont de pieds; alors prolongeant les côtés *be* et *cf*, ils se rencontreront en un point *a*, qui représentera le point *A*; en sorte que mesurant *ba* sur l'échelle, on jugera par le nombre de parties qu'on trouvera, combien de pieds doit avoir *AB*.

En effet, le triangle *bec* ayant les côtés proportionnels à ceux du triangle *BEC*, ces deux triangles doivent avoir les angles égaux; donc l'angle *EBC* ou *ABC* est égal à l'angle *ebc* ou *abc* : la même raison prouve que l'angle *FCB* ou *ACB* est égal à l'angle *fcb* ou *bac*; donc les deux triangles *ACB* et *acb* sont semblables.

On voit en même temps, que par cette construction on peut déterminer les angles *ABC* et

ACB en mesurant, avec le rapporteur, les angles *acb* et *acb* sur le papier.

Au reste, quoique ces expédiens, et beaucoup d'autres qu'on peut facilement imaginer d'après eux, puissent être souvent utiles, nous ne nous y arrêterons pas plus long-temps, parce que la Trigonométrie que nous enseignerons par la suite, nous fournira des moyens plus expéditifs et plus susceptibles de précision; car, quoique les opérations que nous venons de décrire, soient rigoureusement exactes dans la théorie, elles ne donnent, cependant, qu'une exactitude assez bornée dans la pratique, parce que les erreurs qu'on peut commettre dans la figure *abc*, toutes petites qu'elles puissent être, peuvent influer sensiblement sur les conclusions qu'on en tire pour la figure *ABC* qui est toujours incomparablement plus grande.

Des lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

123. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse* ou *réciproque*, lorsque pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, et les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes sont dites *réciproquement proportionnelles* à leurs parties, lorsqu'une de ces lignes et sa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne et sa partie forment les moyens.

124. *Deux cordes* AC *et* BD (fig. 67) *qui se coupent dans le cercle en quelque point* E *que ce soit, et sous quelque angle que ce soit, se coupent toujours en raison réciproque.* C'est-à-dire que AE : BE : : DE : CE.

Car si l'on tire les cordes AB, CD, on forme deux triangles BEA, CED qu'il est aisé de démon-

trer être semblables ; puisqu'outre l'angle BEA égal à CED (20), l'angle ABE ou ABD est égal à l'angle DCE ou DCA ; car ces deux angles ont leur sommet à la circonférence, et s'appuient sur le même arc AD (63). Donc les triangles BEA et CED sont semblables (110) ; donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'est-à-dire que AE : BE : : DE : CE, où l'on voit que les parties de la corde AC sont les extrêmes, et les parties de la corde BD sont les moyens.

125. Puisque la proposition qu'on vient de démontrer, a lieu quelque part que soit le point E, et sous quelque angle que se coupent les deux cordes AC et BD, elle à donc lieu aussi lorsque les deux cordes (*fig.* 68), sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que l'une des deux, AC, par exemple, passe par le centre ; or dans ce cas, la corde BD étant coupée en deux parties égales (52), les deux termes moyens de la proportion AE : BE : : DE : CE, deviennent égaux, et la proportion se change en cette autre, AE : BE : : BE : CE ; *donc toute perpendiculaire* BE *abaissée d'un point* B *de la circonférence, sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AE, CE *de ce diamètre.*

126. Cette proposition a plusieurs applications utiles. Nous n'en exposerons qu'une pour le présent. C'est pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* ae, ec (fig. 70).

On tirera une droite indéfinie AC, sur laquelle on placera, bout-à-bout, deux lignes AE, EC égales aux lignes *ae*, *ec* ; et ayant décrit sur la totalité AC comme diamètre, le demi-cercle ABC, on élévera au point de jonction E la perpendiculaire EB sur AC ; cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.

127. *Deux sécantes* AB, AC (fig. 69.), *qui*

partant d'un même point A hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures AD, AE, à quelqu'endroit que soit le point A hors du cercle, et quelqu'angle que fassent entr'elles ces deux sécantes

Concevez les cordes CD et BE, vous aurez deux triangles ADC, AEB, dans lesquels 1.° l'angle A est commun : 2.° l'angle B est égal à l'angle C, parce que l'un et l'autre ont leur sommet à la circonférence, et embrassent le même arc DE (63) ; donc (110) ces deux triangles sont semblables, et ont par conséquent les côtés proportionnels; donc AB : AC : : AE : AD, où l'on voit que la sécante AB et sa partie extérieure AD forment les extrêmes, tandis que la sécante AC et sa partie extérieure AE forment les moyens.

128. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle *BAC* ; si l'on conçoit que le côté *AB* demeurant fixe, le côté *AC* tourne autour du point *A* pour s'écarter de *AB*, les deux points de section *E* et C s'approcheront continuellement l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin la droite *AC* tombant sur la tangente *AF*, ces deux points se confondront, et *AC*, *AE* deviendront chacune égale à *AF*; en sorte que la proportion *AB* : *AC* : : *AE* : *AD*, deviendra *AB* : *AF* : : *AF* : *AC* ; donc

129. *Si d'un point* A, *pris hors du cercle, on mène une sécante quelconque* AB *et une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante* AB *et la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

130. Cette proposition peut, entr'autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne et extrême raison.* On dit qu'une ligne *AB* (*fig.* 71) est coupée en moyenne et extrême

raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties *AC*, *BC*, telle que l'une *BC* de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entière *AB* et l'autre partie *AC*, c'est-à-dire, telles que l'on ait

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Voici comment on y parvient. On élève à l'une *A* des extrémités, une perpendiculaire *AD* égale à la moitié de *AB*; du point *D* comme centre, et d'un rayon égal à *AD*, on décrit une circonférence qui coupe en *E* la ligne *BD* qui joint les deux points *B* et *D*. Enfin on porte *BE* de *B* en *C*, et la ligne *AB* est coupée en moyenne et extrême raison, au point *C*.

En effet, la ligne *AB* étant perpendiculaire sur *BD*, est tangente (48); et puisque *BF* est sécante, on a (129) $BF : AB :: AB : BE$ ou BC. Donc (*Arith.* 185) $BF - AB : AB - BC :: AB : BC$; or *AB* est égal à *FE*, puisque *AB* est double de *AD*; donc $BF - AB$ est égal à *BE* ou *BC*; et comme $AB - BC$ est *AC*, on a donc $BC : AC :: AB : BC$, ou (*Arith.* 181) $AC : BC :: BC : AB$.

Des Figures semblables.

131. Deux figures d'un même nombre de côtés, sont dites *semblables*, lorsqu'elles ont les angles homologues égaux, et les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures ABCDE, *abcde* (*fig.* 72 et 73) sont semblables, si l'angle A est égal à l'angle *a*; l'angle B, égal à l'angle *b*; l'angle C, égal à l'angle *c*, et ainsi de suite; et si en même temps, le côté AB contient le coté *ab*, autant que BC contient *bc*, autant que CD contient *cd*, et ainsi de suite.

Ces deux conditions sont nécessaires à la fois, dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parce qu'elle entraîne nécessairement l'autre (109 et 114).

132. *Si de deux angles homologues* A *et* a, *de deux polygones semblables, on mène des diagonales* AC, AD, ac, ad, *aux autres angles, les deux polygones seront*

partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.

Car l'angle B est (par la supposition) égal à l'angle *b* et le côté AB : *ab* : : BC : *bc*; donc les deux triangles ABC, *abc* qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle BCA est égal à l'angle *bca*, et AC : *ac* : : BC : *bc*.

Si des angles égaux BCD, *bcd*, on ôte les angles égaux BCA, *bca*, les angles restans ACD, *acd* seront égaux. Or BC : *bc* : : CD : *cd*; donc puisqu'on vient de prouver que BC : *bc* : : AC : *ac*, on aura CD : *cd* : : AC : *ac*; donc les deux triangles ACD, *acd*, sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même chose, et de la même manière, pour les triangles ADE et *ade*, et pour tous les autres triangles qui suivroient, si ces polygones avoient un plus grand nombre de côtés.

133. *Si deux polygones* ABCDE, abcde, *sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ils seront semblables.*

Car les angles B et E sont égaux aux angles *b* et *e*, dès que les triangles sont semblables; et par cette même raison, les angles partiels BCA, ACD, CDA, ADE, sont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux BCD, CDE, sont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs la similitude des triangles fournit cette suite de rapports égaux AB : *ab* : : BC : *bc* : : AC : *ac* : : CD : *cd* : : AD : *ad* : : DE : *de* : : AE : *ae*; ne tirant de cette suite, que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd* : : DE : *de* : : AE : *ae*.

Donc ces polygones ont aussi les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.

Donc pour construire une figure semblable à une figure proposée *ABCDE* (*fig.* 72), et qui ait pour côté homologue à *AB*, une ligne donnée, on portera cette ligne donnée sur *AB*, de *A* en *f* ; par le point *f*, on tirera *fg* parallèle à *BC*, et qui rencontre *AC* en *g* ; par le point *g*, on mènera *gh* parallèle à *CA*, et qui rencontre *AD* en *h* ; enfin par le point *h*, on tirera *hi* parallèle à *DE*, et l'on aura le polygone *Afghi* semblable à *ABCDE*.

134. *Les contours de deux figures semblables sont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures ;* c'est-à-dire, que la somme des côtés de la figure ABCDE contient la somme des côtés de la figure *abcde*, autant que le côté AB contient le côté *ab*.

Car dans la suite des rapports égaux AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd* : : DE : *de* : : AE : *ae*, la somme des antécédens est (*Arith.* 186) à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, : : AB : *ab* ; or il est évident que ces sommes sont les contours des deux figures.

135. Si l'on conçoit la circonférence ABCD EFGH (*fig.* 74) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra ; et si ayant tiré du centre I, aux points de division, des rayons IA, IB, etc. on décrit d'un autre rayon *Ia*, la circonférence *abcdefgh*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, etc. il est évident que si, dans chaque circonférence, on joint les points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables ; car les triangles ABI, *a b I*, etc. sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en I compris entre deux côtés proportionnels ; car IA étant égal à IB, et *Ia* égal à *Ib*, on a évidemment AI : BI : : *aI* : *bI*, et la même chose se

démontre de même pour les autres triangles. De là et de ce qui vient d'être dit (134), on conclura donc que le contour ABCDEFGH est au contour *abcdefgh* : : AB : *ab*, ou (à cause des triangles semblables ABI, *abI*) : : AI : *a* I. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini ; or dans ce cas on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit ; donc les circonférences mêmes ABCDEFGH, *abcdefgh* seront entr'elles : : AI : *a* I, c'est-à-dire, comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diamètres.

136. Concluons donc, 1.° qu'on *peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2.° *Les cercles sont des figures semblables.*

3.° *Les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres.*

137. En général, si dans deux polygones semblables, on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, et terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes qu'on appelle *lignes homologues*, seront entr'elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques ; puisque les angles de deux polygones semblables, sont égaux chacun à chacun ; or si dans ce cas elles n'étoient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent,

terminent, ne pourroient pas être semblablement placés comme on le suppose.

138. C'est sur les principes que nous venons de poser, concernant les figures semblables, que porte, en grande partie, l'art de lever les plans. Nous disons, en grande partie, parce que, lorsque l'espace dont il s'agit de former le plan, est d'une très-grande étendue, comme l'Europe, la France, etc. l'art d'en fixer les points principaux tient à d'autres connoissances, dont ce n'est point encore ici le lieu de parler. Mais pour les détails d'un pays, d'une côte, d'une rade, etc. on peut les déterminer et les représenter ensuite sur un plan, de la maniere que nous allons décrire. Observons auparavant que nous supposons ici, que tous les angles qu'il va être question de mesurer, sont tous dans un même plan horisontal, ou à peu-près. S'ils n'y étoient point, il faudroit, avant de former le plan, les y réduire; nous en donnerons les moyens dans la Trigonométrie.

Supposons donc que A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, (*Fig.* 75) soient plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossiérement sur un papier, ces objets, dans les positions qu'on leur juge à l'œil; pour cet effet, on se transportera aux différens lieux où il sera nécessaire pour prendre une connoissance légere de tous ces objets. Ce premier dessin qu'on appelle un *croquis*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base AB, dont la longueur ne soit pas moindre que la dixieme ou la neu-

vieme partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on puisse voir de ses extrémités, et qui soit telle en même-temps, que de ces mêmes extrémités, on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra; alors avec un instrument propre à mesurer les angles, avec le graphometre, par exemple, on mesurera au point *A* les angles *EAB*, *FAB*, *GAB*, *CAB*, *DAB* que font au point *A* avec la ligne *AB* les lignes qu'on imaginera menées de ce point, aux objets *E*, *F*, *G*, *C*, *D* que je suppose pouvoir être apperçus des extrémités *A* et *B* de la base. On mesurera de même au point *B*, les angles *EBA*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA*, que font en ce point, avec la ligne *AB*, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point *B*, aux mêmes objets que ci-dessus. S'il y a des objets, comme *H*, *I*, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités *A* et *B*, on se transportera en deux des lieux *E* et *F* qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces deux points *H* et *I*; alors regardant *E F* comme une base, on mesurera les angles *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE*, que font avec cette nouvelle base, les lignes qui iroient de ses extrémités aux deux objets *H* et *I*; enfin s'il y a quelqu'autre objet, comme *K*, qu'on n'ait pu voir ni des extrémités de *AB*, ni de celles de *EF*, on prendra encore pour base quelque autre ligne comm *FG* qui joint deux des points observés, et on mesurera de même à ses extrémités les angles *KFG*, *KGF*.

Toutes ces opérations faites, et après avoir déterminé et construit l'échelle du plan qu'on se propose de faire, on tirera sur ce plan, une ligne *ab* qu'on fera d'autant de parties de l'échelle, que l'on a trouvé de toises ou de pieds

dans *AB*, selon qu'on aura mesuré en toises ou en pieds. On fera ensuite au point *a*, avec le rapporteur, un angle *bae*, d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé pour *BAE*; et au point *b*, un angle *eba* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé à l'angle *EBA*; les deux lignes *ae*, *be*, qui formeront ces angles avec *ab*, se couperont en un point *e* qui représentera, sur la carte, la position de l'objet *E* sur le terrein; car, par cette construction, le triangle *abe* sera semblable au triangle *ABE*, puisqu'on a fait deux angles de celui-là égaux à deux angles de celui-ci (110). On se conduira précisément de la même maniere pour déterminer les points *f*, *g*, *d*, *c* qui doivent représenter les points ou objets *F*, *G*, *D*, *C*. Pour avoir ensuite les points *h*, *i* et *k*, on tirera les lignes *ef* et *fg* que l'on considérera comme bases, et on déterminera la position des points *h* et *i* à l'égard de *ef*, et du point *k* à l'égard de *fg*, de la même maniere qu'on a déterminé celle des autres points à l'égard de *ab*. Bien entendu que toutes les lignes qu'on tirera dans ces différentes opérations, seront tracées au crayon seulement, parce qu'elles n'ont d'autre usage que de déterminer les points *c*, *d*, *e*, etc; lorsqu'ils sont une fois trouvés, on efface tout le reste.

Je ne m'arrête pas à démontrer en détail, que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* sont placés entr'eux de la même maniere que les objets *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, etc. le sont entr'eux; il suffit d'observer que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g* sont (par la construction) placés à l'égard de *ab*, comme les points *C*, *D*, *E*, *F*, *G* le sont à l'égard de *AB*, puisque les triangles *cab*, *dab*, *eab*, etc. ont été faits semblables aux triangles *CAB*, *DAB*,

EAB, et disposés de la même maniere ; ainsi la difficulté, s'il y en a, ne peut tomber que sur les points *h*, *i* et *k* ; or (par la construction) les points *h* et *i* sont placés à l'égard de *ef*, comme les points *H* et *I* le sont à l'égard de *EF*; donc puisque ces deux dernieres lignes sont placées de la même maniere à l'égard des lignes *ab* et *AB*, les points *h* et *i* seront aussi placés à l'égard de *a b* de la même maniere que *H* et *I* le sont à l'égard de *AB*. Ainsi les distances respectives des points *a*, *e*, *f*, *g*, etc. mesurées sur l'échelle du plan, feront connoître les distances des objets *A*, *E*, *F*, *G*, etc.

On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que cette même méthode peut servir à vérifier des points que l'on seupçonneroit douteux sur une carte, ainsi qu'à y ajouter des points qu'on auroit omis.

On peut aussi employer la boussole à déterminer la position des objets *E*, *F*, *G*, etc. et on l'y emploie même assez souvent ; mais alors on observe au point *A*, non pas les angles *EAB*, *FAB*, mais les angles que les lignes *AE*, *A*F, etc. et la base même *AB*, font avec la direction de l'aiguille aimantée ; on fait la même chose au point *B* : et pour marquer les objets sur la carte, on tire par le point *a* une ligne qui représente la direction de l'aiguille aimantée, et on mene les lignes *ab*, *ac*, *af*, etc. de maniere qu'elles fassent avec celle-là, les angles qu'on a observés au point *A* ; fixant ensuite la grandeur qu'on veut donner à *ab*, on se conduit à l'égard du point *b* de la même maniere qu'on a fait à l'égard du point *a*. Quant aux autres points *H* et *I* qui n'étoient point visibles de *A* et *B*, on les détermine à l'égard de *E* F, de la même

maniere qu'on a déterminé les autres à l'égard de *AB*; enfin on marque ces points en *h* et *i*, en les déterminant à l'égard de *e f*, de la même maniere que les autres points *e*, *f*, etc. ont été déterminés à l'égard de *a b*. Au reste, on ne doit, autant qu'on le peut, lever ainsi à la boussole, que les petits détails, comme les détours d'un chemin, les sinuosités d'une riviere, etc.; quand les points principaux ont été déterminés avec exactitude, on peut prendre ces détails avec une attention moins scrupuleuse, parce que les objets qu'on releve alors, étant peu distants entr'eux, l'erreur qu'onpeut commettre sur les angles ne peut pas être d'une grande conséquence.

Lorsque quelques circonstances déterminent à marquer, sur la carte déjà construite, quelque nouveau point, il n'est pas indispensable d'observer ce point, de deux autres points connus : on le détermine souvent au contraire, en observant de ce point, deux autres points connus; par exemple, supposons que le point *H* soit un point d'une rade où l'on a mesuré la profondeur, à la sonde, et qu'on veut marquer cette sonde sur la carte; on observera du point *H*, les angles *EHM*, F*HM*, que sont avec la direction *LM* de l'aiguille aimantée, les deux lignes *EH*, F*H*, qui vont à deux objets connus *E*, F; puis, pour marquer le point *H* sur la carte, on tirera à part, (*Fig.* 77) une ligne *lm* qui marque la direction de l'aiguille aimantée, et en un point *n* de cette ligne, on fera les angles *onm*, *pnm*, égaux aux angles *EHM*, *FHM*; enfin par le point *f* on menera *fh* parallele à *pn*, et par le point *e*, la ligne *e h* parallele à *no*; ces deux lignes se rencontreront au point cherché *h*

Cette même méthode sert aussi à se reconnoître

en mer, à la vue de deux terres. Au reste, la rose des vents, qui est marquée sur les cartes marines, fournit des expédiens pour abréger quelques-unes de ces opérations; nous ne pouvons entrer dans ces détails qui appartiennent immédiatement au pilotage: il nous suffit d'exposer les principes sur lesquels ces différentes pratiques sont fondées.

Observons, cependant, qu'on ne doit déterminer les sondes, de cette maniere, que quand les circonstances ne permettent pas de faire autrement; car quelque exercé qu'on puisse être à se servir du compas de variation, on ne parvient jamais à relever du point *H* en mer, les objets *E*, F, avec une précision sur laquelle on puisse autant compter, que sur le relévement qu'on feroit d'un objet *H*, tel que seroit une chaloupe, une bouée, etc. en observant des points *E* et F à terre. Les sondes sont assez importantes pour qu'on doive autant qu'on le peut, employer, pour les détermi er, la méthode la plus susceptible d'exactitude.

Il y a encore une autre maniere de lever un plan, qui est d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même temps qu'on observe les différents points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet, est représenté par la Figure 78. *ABCD* est une planche de 15 à 16 pouces de long, et à peu-près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphometre. Sur cette planche, on étend une feuille de papier qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. *LM* est une regle garnie de pinnules à ses deux extrémités.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une

campagne, on prend une base *am*, comme dans les opérations ci-dessus, et posant le pied de l'instrument en *a*, on fait planter un piquet en *m*. On applique la regle *LM* sur le papier, et on la dirige de maniere à voir le piquet *m* à travers les deux pinnules; alors on tire le long de la regle, une ligne *E*F, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de pieds entre le point *E* d'où l'on observe d'abord, et le point *f* d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la regle autour du point *E*, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant à travers les pinnules, quelqu'un des objets *I*, *H*, *G*; et à mesure qu'on en rencontre un, on tire le long de la regle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en *a*, on transporte l'instrument en *m*, et on laisse un piquet en *a*. Alors on fait au point *f* les mêmes opérations à l'égard des objets *I*, *H*, *G*, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fI*, *fH*, *fG*, qui dans ce second cas vont, ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premieres aux points *g*, *h*, *i*, qui sont la représentation des objets *G*, *H*, *I*.

C'est encore sur la théorie des figures semblables, qu'est fondée la méthode de faire *le point*, c'est-à-dire, de représenter sur une carte, la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation, ou pendant une partie de sa navigation.

Supposons qu'un vaisseau, parti d'un lieu connu, ait d'abord couru 28 lieues au Sud-Est, puis 20 lieues au Sud, et enfin 26 lieues au Sud-Ouest; on veut déterminer, sur la carte, la route qu'a tenue le vaisseau, et le lieu de l'arrivée.

On cherche d'abord sur la carte, le point du départ: je suppose que ce soit le point *d* (*fig.* 79.)

On cherche pareillement, parmi les divisions de la rose des vents marquée sur la carte, quelle est la ligne qui va au Sud-Est; je suppose que ce soit ici la ligne *CF* ; on tire par le point *d* la ligne *de* parallele à *CF*, et on donne à *de* autant de parties de l'échelle de la carte, que l'on a couru de lieues au Sud-Est. Par le point *e* on tire pareillement une ligne *eb* parallele à la ligne *CE* qui est dirigée au Sud; et on fait *eb* d'autant de parties de l'échelle, qu'on a couru de lieues au Sud; enfin par le point *b*, on mene *ba* parallele à *CD* qui va au Sud-Ouest; et ayant fait *ba* d'autant de parties de l'échelle, qu'on a couru de lieues au Sud-Ouest, le point *a* est le point d'arrivée, et la trace *deba* représente la route qu'a tenue le vaisseau. En effet les lignes *de*, *eb*, *ba* font entr'elles les mêmes angles qu'ont fait entr'elles successivement les différentes parties de la route du vaisseau; d'ailleurs les parties *ed*, *eb*, *ba*, ont entr'elles les mêmes rapports que les espaces que le vaisseau a réellement décrits; donc la figure *deba* est (131) absolument semblable à la route qu'a tenue le vaisseau; enfin le point *d* est situé sur la carte comme le point de départ l'est à l'égard de la terre (*); donc *deba* est non-seulement semblable à la route du vaisseau, mais encore située à l'égard des différents points de la carte, comme la route du vaisseau l'a été à l'égard des différents points de la terre.

(*) Cette expression n'est pas rigoureusement exacte, sans doute; mais ce n'est point ici le lieu d'en fixer le sens rigoureux. Les points d'une carte, sur-tout d'une carte réduite, ne sont pas situés entr'eux comme les points de la terre qu'ils représentent, mais il suffit ici qu'ils aient le même usage. Nous reviendrons ailleurs sur cet objet.

DEUXIÈME SECTION.

Des Surfaces.

139. Nous allons examiner les propriétés de la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées; c'est-à-dire, à l'étendue en longueur et largeur.

Nous ne considérerons, dans cette section, que les *surfaces* ou *superficies planes;* nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes, et du cercle.

La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles, ou des quadrilatères.

On distingue les quadrilatères en *Quadrilatère* simplement dit, *Trapèze*, et *Parallélogramme.*

La figure de quatre côtés, qu'on appelle simplement *Quadrilatère*, est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallèle à un autre. (*Voyez fig.* 80).

Le *Trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 81).

Le *Parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (*fig.* 82, 83, 84, 85, 86, 86*); on distingue quatre sortes de parallélogrammes; le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle* et le *quarré.*

Le *rhomboïde* est le parallélogramme dont les côtés contigus, et les angles, sont inégaux, (*fig.* 82).

Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, est celui dont les côtés sont égaux, et les angles inégaux, (*fig.* 83).

Le *rectangle*, est celui dont les angles sont égaux, et les côtés contigus inégaux, (*fig.* 84).

Le *quarré* est celui dont les côtés et les angles sont égaux, (*fig.* 85).

Quand les angles d'un quadrilatère sont égaux, ils sont nécessairement droits, parceque les quatre angles de tout quadrilatère, valent ensemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire EF (*fig.* 82), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle la *hauteur* de ce parallélogramme; et le côté BC sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base*.

La hauteur d'un triangle ABC (*fig.* 87, 88 et 89), est la perpendiculaire AD abaissée d'un angle A de ce triangle, sur le côté opposé BC, prolongé, s'il est nécessaire; et ce côté BC se nomme alors la *base*.

140. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (fig. 89) *est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.*

Car on peut toujours concevoir tirée, par le sommet de l'angle C, une ligne CE parallèle au côté BA, et par le sommet de l'angle A, une ligne AE parallèle au côté BC; ce qui forme avec les côtés AB et BC, un parallélogramme ABCE de même base et de même hauteur que le triangle ABC; cela posé, il est aisé de voir que les deux triangles ABC, CEA sont égaux; car le côté AC leur est commun; d'ailleurs les angles BAC, ACE, sont égaux, à cause des parallèles (38); et par la même raison, les angles BCA et CAE sont égaux; ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont donc égaux; donc le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE.

141. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 86 et 86*) *de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.*

Les deux parallélogrammes ABCD, EBCF (*fig.* 86), ont une partie commune EBCD; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles ABE, DCF; or il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux : car AB est égal à CD, ces lignes étant des parallèles comprises entre parallèles (82;) et par la même raison, BE est égal à CF; d'ailleurs (43) l'angle ABE est égal à l'angle DCF; ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc aussi le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF sont égaux.

Dans la *figure* 86*, on démontrera de la même manière que les deux triangles ABE, DCF, sont égaux; donc, retranchant de chacun le triangle DIE, les deux trapèzes restans ABID, EICF seront égaux; enfin ajoutant à chacun de ces trapèzes le triangle BIC, le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF qui en résulteront, seront égaux.

142. On peut donc dire aussi, que *les triangles de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux;* puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur qu'eux (140).

143. De cette dernière proposition on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit ABCDE (*fig.* 91) un pentagone; si l'on tire la diagonale

EC qui joigne les extrémités de deux côtés contigus ED, DC, et qu'après avoir mené DF parallèle à EC, et qui rencontre en F, le côté AE prolongé, on tire CF, on aura un quadrilatère ABCF égal en surface au pentagone ABCDE ; car les deux triangles ECD, ECF, ont pour base commune EC ; et étant de plus compris entre mêmes parallèles EC, DF, ils sont de même hauteur ; donc ils sont égaux : donc si l'on ajoute à chacun le quadrilatère EABC, on aura le pentagone ABCDE égal au quadrilatère ABCF.

Or de même qu'on vient de réduire le pentagone, à un quadrilatère, on réduira de même le quadrilatère à un triangle ; donc, etc.

De la mesure des Surfaces.

144. *Mesurer une surface*, c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue.

Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des quarrés ; quelquefois aussi ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi mesurer la surface ABCD (*fig.* 90), c'est déterminer combien elle contient de quarrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du quarré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de pieds quarrés ; si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de rectangles de 3 pieds de long sur un pied de large.

Pour mesurer, en parties quarrées, la surface du rectangle ABCD, il faut chercher combien de fois le côté AB contient le côté *ab* du quarré



abcd qui doit servir d'unité ou de mesure ; chercher de même, combien de fois le côté BC contient *ab* ; et alors multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de quarrés tel que *abcd*, que la surface ABCD peut renfermer.

Par exemple, si *AB* contient *ab*, quatre fois ; et si *BC* contient *ab*, sept fois, je multiplie 7 par 4, et le produit 28 marque que le rectangle *ABCD* contient 28 quarrés tels que *abcd*.

Car si par les points de division E, F, G, on mène des parallèles à BC, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de quarrés, tels que *abcd*, qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté BC ; donc il faut répéter les quarrés contenus dans l'un de ces rectangles, autant de fois qu'il y a de rectangles ; c'est-à-dire, autant de fois que le côté AB contient *ab* ; et comme le nombre des quarrés contenus dans chaque rectangle, est le même que le nombre des parties de BC, il est donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de BC, par le nombre des parties égales de AB, on a le nombre de quarrés tels que *abcd*, que le rectangle ABCD peut renfermer.

Quoique nous ayons supposé dans le raisonnement que nous venons de faire, que les côtés AB et BC contenoient un nombre exact de mesures *ab*, ce raisonnement ne s'étend pas moins au cas où la mesure *ab* n'y seroit pas contenue exactement.

Par exemple, si *BC* ne contenoit que six mesures et $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroit que 6 quarrés et $\frac{1}{2}$; et si le côté *AB* ne contenoit que 3 mesures et $\frac{1}{3}$ il n'y auroit que 3 rectangles et $\frac{1}{3}$, chacun de 6 quarrés et $\frac{1}{2}$; il faudroit donc multiplier 6 $\frac{1}{2}$ par 3 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, le nombre des mesures de *BC* par le nombre des mesures de *AB*.

145. Puisque (135) le parallélogramme rectangle ABCD, (*fig.* 86 *et* 86*) est égal au parallélogramme EBCF de même base et de même hauteur, il s'ensuit donc que pour avoir la surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base BC, par le nombre des parties de sa hauteur BA; on peut donc dire en général que...

Pour avoir le nombre de mesures quarrées contenues dans la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD (fig. 82) *il faut mesurer la base* BC *et la hauteur* EF, *avec une même mesure, et multiplier le nombre des mesures de la base, par le nombre des mesures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (144), que lorsqu'on veut évaluer la surface ABCD (*fig.* 90), on ne fait autre chose que répéter la surface GBCH ou le nombre de quarrés qu'elle contient, autant de fois que son côté GB est contenu dans le côté AB; ainsi le multiplicande est réellement une surface, et le multiplicateur est un nombre abstrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant très-communément, que *pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur* : mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des quarrés correspondans aux parties de la base et le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois; de sorte que quand on multiplie une ligne on ne peut jamais avoir qu'une ligne; et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres élémens que des surfaces, et quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme *ABCD* (*fig.* 82), peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et parallèles à *BC*, qu'il y a de points dans la hauteur *EF*, on doit sous-entendre que ces

lignes ont une largeur infiniment petite ; (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface); et alors chacune de ces lignes est une surface qui étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur *AE*, donne la surface *ABCD*.

Nous adopterons néanmoins cette expression, *multiplier une ligne par une ligne* ; mais on doit ne pas perdre de vue que ce n'est que comme manière abrégée de parler. Ainsi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une surface, quoique dans le vrai on dût dire, le *nombre* des parties d'une ligne multiplié par le *nombre* des parties d'une autre ligne, exprime le nombre des parties quarrées contenues dans le parallélogramme qui auroit une de ces lignes pour hauteur, et l'autre ligne pour base.

Pour marquer la surface du parallélogramme *ABCD* (*fig.* 82), nous écrirons $CB \times EF$; dans la *figure* 84, nous écrirons $BA \times BC$; et dans la *figure* 85, où les deux côtés *AB* et *BC* sont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$ nous écrirons $\overline{AB}^2$; de sorte que $\overline{AB}^2$ signifiera la ligne AB multipliée par elle-même, ou la surface du quarré fait sur la ligne AB ; de même, pour marquer que la ligne AB est élevée au cube, nous écrirons, $\overline{AB}^3$, qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$ ou à $\overline{AB}^2 \times AB$.

146. Il suit de ce que nous venons de dire, que pour que deux parallélogrammes soient égaux en surface, il suffit que le produit de la base de l'un, multipliée par la hauteur, soit égal au produit de la base du second, multipliée par la hauteur. Donc, *lorsque deux parallélogrammes sont égaux en surface, ils ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs ;* c'est-à-dire, que la base et la hauteur de l'un peuvent être considérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la base et la hauteur de l'autre formeront les moyens; car en les considérant ainsi, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; or dans ce cas il y a nécessairement proportion (*Arith.* 178).

Au reste, on peut voir cette vérité immédiate-

Digitized by Google

ment, en faisant attention que si la base de l'un est plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que sa hauteur soit plus grande à proportion pour former le même produit.

147. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, (140), il suit de ce qui vient d'être dit (145) que *pour avoir la surface d'un triangle, il faut multiplier la base par la hauteur, et prendre la moitié du produit.*

Ainsi si la hauteur AD (*fig.* 87), est de 34 pieds, et la base BC de 52, la surface contiendra 884 pieds quarrés; c'est la moitié du produit de 52 par 34.

Il est inutile, je pense, d'insister pour faire sentir qu'on aura le même produit en multipliant la base par la moitié de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la base.

148. Donc 1.° *pour avoir la surface du trapèze*, il faut ajouter ensemble les deux côtés parallèles, prendre la moitié de la somme, et la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux parallèles. Car si l'on tire la diagonale BD (*fig.* 81), on a deux triangles ABD, BDC. dont la hauteur commune est EF. Pour avoir la surface du triangle ABD, il faudroit donc multiplier la moitié de AD par EF; et pour le triangle BDC, il faudroit multiplier la moitié de BC aussi par EF; donc la surface du trapèze vaut la moitié de AD multipliée par EF, plus la moitié de BC multipliée par EF; c'est-à-dire, la moitié de la somme AD plus BC multipliée par EF.

Si par le milieu G de la ligne AB, on tire GH parallèle à BC, cette ligne GH sera la moitié de la somme des deux lignes AD et BC. Car soit I le point

point où GH coupe la diagonale BD, les triangles BAD, BGI, semblables, à cause des parallèles AD et GI, font connoître (109) que GI est moitié de AD, puisque BG est moitié de AB. Or GH étant parallèle à BC et à AD, DC (102) est coupée de la même manière que AB ; on prouvera donc de même que IH est moitié de BC, en considérant les triangles semblables BDC et IDH.

Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, on peut dire que la *surface d'un trapèze* ABCD, *est égal au produit de sa hauteur* EF, *par la ligne* GH, *menée à distances égales des deux bases opposées.*

149. 2.° *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles par des lignes menées d'un même point à chacun de ses angles, et calculer séparément la surface de chacun de ces triangles ; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totale du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles ; *voyez fig.* 92.

150. *Si le polygone étoit régulier (fig.* 53) ; comme tous les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires menées du centre, sont égales ; en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on auroit la surface en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés ; ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la sur-*

face d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés, ne diffère pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

152. Puisque les circonférences des cercles sont entr'elles comme les rayons ou comme les diamètres (136), il est visible que si l'on connoissoit la circonférence d'un cercle d'un diamètre connu, on seroit bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connoîtroit le diamètre, puisqu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrième terme de cette proportion; *le diamètre de la circonférence connue, est à cette même circonférence, comme le diamètre de la circonférence cherchée, est à cette seconde circonférence.*

On ne connoît point exactement le rapport du diamètre à la circonférence; mais on en a des valeurs assez approchées, pour qu'un rapport plus exact puisse être regardé comme absolument inutile dans la pratique.

Archimede a trouvé qu'un cercle qui auroit 7 pieds de diamètre, auroit 22 pieds de circonférence, à très-peu de chose près. Ainsi, si l'on demande quelle sera la circonférence d'un cercle qui auroit 20 pieds de diamètre, il faut chercher (*Arith.* 179) le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$7 : 22 :: 20 :$$

Ce quatrième terme qui est $62\frac{6}{7}$, est à très-peu de chose près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diamètre. Je dis à très-peu de chose près; car il faudroit que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diamètre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22, fût fautive d'un pied. Au reste, en employant le rapport de 7 à 22, on peut se dispenser de faire la proportion; il suffit de tripler le diamètre, et d'ajouter au produit la septieme partie de ce même diamètre; parce que $3\frac{1}{7}$ est le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport beaucoup plus approché; c'est celui de 113 à 355. Ce rapport est tel, qu'il faudroit que le diamètre d'un cercle fût de 1000000 pieds au moins, pour qu'on fît, en se servant de ce rapport,

une erreur d'un pied sur la circonférence (*). Enfin, si l'on veut avoir la circonférence, avec encore plus de précision, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,14159265358979 32, qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, et dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a moins ou plus besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle proposé, l'opération se réduit à multiplier le nombre 3,1415926, etc. par le diamètre de ce cercle.

Il est donc facile, actuellement, de trouver la surface d'un cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds quarrés est la surface d'un cercle qui auroit 20 pieds de diamètre ; je calcule sa circonférence comme ci-dessus ; et ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds et $\frac{6}{7}$, je multiplie 62 $\frac{6}{7}$ par 5, qui est la moitié du rayon (151), et j'ai 314 $\frac{2}{7}$ pieds quarrés, pour la surface de ce cercle.

153. On appelle *secteur de cercle* la surface comprise entre deux rayons IA, IB (*fig.* 74), et l'arc AVB. Et on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc AVB et sa corde AB.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteur de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, et sa surface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur sommet au centre, et pour hauteur le rayon. Donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle*, il faut multiplier l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon.

A l'égard du segment, il est évident que pour

(*) Pour retenir aisément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le composent, se trouvent, en partageant en deux parties égales, les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5 écrits deux fois de suite en cette manière 113355.

en avoir la surface, il faut retrancher la surface du triangle IAB, de celle du secteur IAVB.

Il est évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que par conséquent, quand on connoît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion : 360 *degrés sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence, est à celle de ce même arc.*

S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connoît le nombre de degrés et le rayon, on cherchera, par la proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui est la base de ce secteur, et on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, si l'on demande quelle est la surface du secteur de 32d 40′ dans un cercle qui a 20 pieds de diamètre, on trouvera, comme ci-dessus (151), que la circonférence est de $62\frac{6}{7}$ pieds; cherchant le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 360d : 32d 40′ : : $62\frac{6}{7}$: ce quatrième terme qu'on trouvera de $5\frac{19}{27}$, sera la longueur de l'arc de 32d 40′, laquelle, étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne $28\frac{14}{27}$ pour la surface du secteur de 32d 40′.

Il est aisé, d'après cela, d'avoir la surface du segment, en déterminant (*Fig.* 74) le côté *AB* et la hauteur *IZ* du triangle *IAB*, par une opération fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons enseignée (121); mais la Trigonométrie, que nous verrons par la suite, nous donnera des moyens encore plus expéditifs et plus susceptibles d'exactitude.

154. Quoique ce que nous avons dit (149), suffise pour mesurer toute espece de figure rec-

tiligne ; néanmoins, il est à propos que nous exposions ici, une autre méthode qui est plus simple dans la pratique. Elle consiste (*Fig.* 93) à tirer dans la figure, une ligne *AG*, abaisser de chacun des angles, des perpendiculaires *BM*, *LC*, *DK*, *EI*, *FH*, sur cette ligne *AG* ; mesurer chacune de ces lignes, ainsi que les intervalles *AN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RG*; alors la figure est partagée en plusieurs parties, dont les deux extrêmes, tout au plus, sont des triangles, et les autres sont des trapezes ; les premiers se mesurent en multipliant la hauteur par la moitié de la base (147) ; à l'égard des trapezes, chacun se mesure en multipliant la moitié de la somme des deux côtés paralleles, par la distance perpendiculaire de ces mêmes côtés (148).

Lorsque la figure est une ligne courbe, on la mesurera avec une exactitude suffisante pour la pratique, en partageant la ligne *AT*, (*Fig.* 94), qu'on tirera suivant sa plus grande longueur, en un assez grand nombre de parties pour que les arcs interceptés *AB*, *BC*, *CD*, etc. puissent être regardés comme des lignes droites ; et pour rendre le calcul le plus simple qu'il soit possible, on fera les parties *AO*, *OP*, etc. égales entr'elles; alors, pour avoir la surface, on ajoutera ensemble toutes les lignes *BN*, *CM*, *DL*, *EK*, *FI*, et la moitié seulement de la derniere *GH*, si la courbe est terminée par une droite *GH* perpendiculaire à *AT* : on multipliera le tout par l'un des intervalles *AO*, et le produit sera la surface cherchée ; c'est une suite immédiate de ce qui a été dit (148) ; car pour avoir la surface *ABN*, il faut multiplier *AO*, par la moitié *BN* ; pour avoir celle de *BCMN*, il faut multiplier

OP ou *AO*, par la moitié de *BN* et de *CM*; pour avoir celle de *CDLM*, il faut multiplier *AO*, par la moitié de *CM* et de *DL*, et ainsi de suite; donc, en réunissant ces produits, on voit que *AO* sera multiplié par 2 moitiés de *BN*, plus 2 moitiés de *CM*, plus 2 moitiés de *DL*, plus 2 moitiés de *EK*, plus 2 moitiés de *FI*, plus enfin une moitié seulement de *GH*; c'est-à-dire, que *AO* doit être multiplié par la totalité des lignes *BN*, *CM*, *DL*, *EK*, *FI*, plus la moitié de la derniere.

S'il s'agissoit de l'espace *BNHG* terminé par les deux lignes *BN*, *GH*, on prendroit non pas *BN* entiere, mais sa moitié seulement.

La regle que nous venons d'exposer pour mesurer les surfaces planes terminées par des courbes, peut être employée fort utilement dans diverses recherches relatives aux Navires. On a souvent besoin, dans ces recherches, de connoître la surface de quelques coupes horizontales du Navire; nous aurons occasion d'en faire usage par la suite.

Du Toisé des Surfaces.

155. Ce qu'on entend par *Toisé* des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises et parties de toises.

Il y a deux manières d'évaluer les surfaces, en toises quarrées et parties de la toise quarrée.

Dans la première, on compte par toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, etc.

La toise quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 6 pieds de long sur 6 pieds de large. Le pied quarré contient 144 pouces

quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large. Par une raison semblable, on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, etc.

Ainsi, pour évaluer une surface en toises quarrées et parties quarrées de la toise quarrée, il n'y a autre chose à faire qu'à réduire les deux dimensions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite espèce (en lignes, si la plus petite espèce est des lignes); et après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, ensuite en pieds quarrés, et enfin en toises quarrées, en divisant successivement par 144, 144 et 36.

Par exemple, pour trouver la surface d'un rectangle qui auroit $2^T\ 3^P\ 5^p$ de long, et $0^T\ 4^P\ 6^p$ de large, je réduis ces deux dimensions, en pouces, et j'ai 185^p à multiplier par 54^p, ce qui me donne 9990 pouces quarrés, et s'écrit ainsi 9990^{pp}. Pour les réduire en pieds quarrés, je divise par 144; j'ai 69 pieds quarrés et 54^{pp} de reste, c'est-à-dire, $69^{PP}\ 54^{pp}$; pour réduire les 69^{PP} en toises quarrées, je divise par 36; j'ai une toise quarrée ou 1^{TT} pour quotient, et 33^{PP} de reste; en sorte que la surface cherchée es de $1^{TT}\ 33^{PP}\ 54^{pp}$.

Dans la seconde manière d'évaluer les surfaces, en toises quarrées et parties de la toise quarrée, on conçoit la toise quarrée composée de six rectangles qui ont tous une toise de haut et un pied de base, et que pour cette raison, on nomme *Toises-pieds :* on subdivise chaque toise-pied en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toise de haut et un pouce de base, et qu'on appelle *Toises-pouces :* on subdivise chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacune une toise de haut et une ligne de base, et qu'on appelle *Toises-lignes;* en un

mot, on se représente la toise quarrée divisée et subdivisée continuellement en rectangles, qui ont constamment une toise de haut sur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de base. Les subdivisions qui passent le point, se marquent comme les secondes, tierces, quartes, etc. pour les degrés, excepté qu'on fait précéder la marque par un T signe de la toise.

Ainsi les marques successives et les valeurs des subdivisions de la toise quarrée, sont telles qu'on les voit dans la Table suivante.

TABLE des Subdivisions de la Toise quarrée en Rectangles d'une Toise de haut, et caractères qui représentent ces parties.

La Toise-quarrée vaut 6 Toises-pieds, ou	6TP
La Toise-pied vaut 12 Toises-pouces, ou	12TP
La Toise-pouce	12TI
La Toise-ligne	12Tpt
La Toise-point	$12T'$
La T' ou Toise-prime	$12T''$
La T'' ou Toise-seconde	$12T'''$
La Toise-Tierce	$12T^{iv}$

et ainsi de suite.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes, pour évaluer une surface, il faut concevoir que les toises du multiplicande, sont des toises quarrées ; les pieds, des toises-pieds ; les pouces, des toises-pouces, et ainsi de suite ; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande.

Par exemple, si ayant à mesurer la surface du rectangle *ABCD* (*Fig.* 95), je trouve le côté *AD* de $4^T\ 3^P\ 6^p$, et le côté *AB* de $2^T\ 3^P$; je vois que si *AE* représente une toise, la surface *ABCD* est composée de deux rectangles qui ont

chacun une toise de haut sur 4^{T} 4^{P} 6p de long, et d'un rectangle qui a 3^{P} ou une demi-toise de haut, sur 4^{T} 3^{P} 6p de long, et qui par conséquent est la moitié de l'un de deux autres; de sorte que je vois qu'il s'agit de répéter, 2 fois $\frac{1}{2}$ un rectangle de 1^{T} de haut sur 4^{T} 3^{P} 6 p de long, c'est-à-dire de répéter 2 fois $\frac{1}{2}$ la quantité de 4^{TT} 4^{TP} 6^{Tp}. Ceci prouve ce que nous avons dit dans la Note du n° 47 de l'Arithmétique, sur la nature des unités du produit et de ses facteurs dans la multiplication géométrique.

On voit, en même temps, qu'il n'y a ici aucune nouvelle regle à apprendre pour faire ces sortes de multiplications qui sont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétique sous le nom de *Multiplication des Nombres complexes.* Ainsi, pour nous borner à un exemple, si l'on me demande quelle est la surface d'un rectangle qui auroit 52^{T} 4^{P} 5p de long, et 44^{T} 4^{P} 8p de large; je fais l'opération comme il suit :

52T	4P	5p		
44T	4P	8p		
208TT	0Tp	0Tp	0Tl	0Tpt
208				
22.				
7.	2.			
2.	2.	8.		
0.	3.	8.		
26.	2.	2.	6.	
8.	4.	8.	10.	
2.	5.	6.	11.	4.
2.	5.	6.	11.	4.
2361TT	2TP	5TP	2Tl	8Tpt

C'est-à-dire, je multiplie 52 par 44, puis les 4^p du multiplicande, par 44, en prenant pour 3^p la moitié de 44^p, et pour 1^p le tiers de ce que j'aurai eu pour 3^p; ensuite je multiplie 5^p par 44, en prenant pour 4^p le $\frac{1}{3}$ de ce que j'ai eu pour 1^p; et pour 1^p je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^p.

Pour multiplier ensuite, par les 4^p qui se trouvent dans le multiplicateur, je prends pour 3^p, la moitié du multiplicande total, et pour 1^p, le tiers de ce que j'ai eu pour 3^p. Enfin, pour multiplier par 8^p, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^p, et je l'écris deux fois; réunissant tous ces produits particuliers, j'ai 2361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt} pour produit total. Ainsi on voit que nous avons été fondés à dire, dans l'Arithmétique, que les regles que nous donnions pour les nombres complexes, renfermoient le toisé, et qu'il n'y avoit autre chose à exposer, que la nature des unités du produit et des facteurs.

156. Quand on a ainsi évalué une surface, en toises-quarrées, toises-pieds, toises pouces, etc. il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, etc. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 et $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on le voit ci-dessous; multiplier chaque partie, par le nombre inférieur qui lui répond, et porter les produits des deux nombres consécutifs 6 et $\frac{1}{2}$ dans une même colonne; lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$ il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne.

Ainsi, pour réduire en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, etc. les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

2361TT	2TP	5Tp	2Tl	8Tpt
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361TT	12PP	72pp		
	2	12		
		4		
2361TT	14PP	88pp		

Et je multiplie les toises-pieds par 6, parce que la toise-pied vaut six pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut sur un pied de base. Je multiplie les toises-pouces par $\frac{1}{2}$, et je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés, parce que la toise-pouce étant la 12e partie de la toise-pied, doit valoir la 12e partie de 6 pieds quarrés, c'est-à-dire, un demi-pied quarré ; donc les 5 toises-pouces valent 2 pieds quarrés et demi ; et comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces quarrés, au lieu du demi, j'écris 72 ; ensuite pour réduire les toises-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toise-ligne étant la 12e partie de la toise-pouce, doit valoir la 12e partie de 72 pouces quarrés ; c'est-à-dire, 6 pouces quarrés ; un raisonnement semblable prouve qu'on doit multiplier ensuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, etc. ainsi que nous venons de le dire.

154. Donc réciproquement, si l'on veut réduire en toises-pieds, toises-pouces, etc. des parties quarrées de la toise quarrée, l'opération se réduira 1.° à prendre le sixième du nombre des pieds quarrés ; ce qui donnera des toises-pieds. 2.° On doublera le reste, s'il y a en un, et on y ajoutera une unité si le nombre des pouces quarrés, est ou excède 72 ; et l'on aura les toises-pouces. 3.° Ayant retranché 72, du nombre des pouces quarrés, lorsque ce nombre sera ou excédera 72, on divisera le reste par 6, et l'on aura les toises-lignes. 4.° On doublera le reste, et on y ajoutera une unité, si le nombre des lignes quarrées excède 72,

et on aura le nombre des toises-points. On voit par-là comment on doit continuer, pour avoir les parties suivantes lorsqu'il doit y en avoir.

Ainsi si l'on proposoit de réduire 52 TT 25PP 87pp 92ll, en toises-pieds, toises-pouces, etc. je diviserois 25 par 6, et j'aurois 4TP, et 1 de reste; je double cet 1, et j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces quarrés excède 72; j'ai donc 3Tp. Je retranche 72 de 87, et je divise le reste 15, par 6; j'ai 2Tl, et 3 de reste. Je double ce reste, et j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes quarrées excède 72, j'ai 7Tpts. Je retranche 72 de 92, et je divise le reste 20, par 6; j'ai 3T′, et 2 de reste; je double ce reste, et j'ai 4T″; en sorte que j'ai en total 52TT 4TP 3Tp 2Tl 7Tpts 3T′ 4T″.

156. Puisque, pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la base, par le nombre des parties de la hauteur, il s'ensuit (*Arith.* 74) que si connoissant la surface et le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne; la division d'une surface par une ligne, n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on divise une surface par une surface.

En effet, selon ce que nous avons (155) lorsqu'on évalue la surface du rectangle ABCD (*fig.* 95) on répète la surface du rectangle ED de même base, et qui a pour hauteur, l'unité ou la mesure principale AE, on répète, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur AE est comprise dans la hauteur AB; ainsi quand on veut connoître le nombre de parties de AB, ou le nombre des unités AE qu'il contient, il faut chercher combien de fois la

surface ABCD contient celle du rectangle ED. Donc si la surface ABCD étant exprimée par 361TT 2TP 5Tp 2Tl 8Tpt, la base AD est de 4T 3P 6p ; pour avoir la hauteur AB, il faut concevoir que l'on a 361TT 2TP, etc. à diviser, non par 4T 3P 6p, mais par 4TT 3TP 6Tp ; et comme la toise est alors facteur commun du dividende et du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un et l'autre exprimoient des toises et parties de toises linéaires ; donc l'opération se réduit à diviser 361T, 2p, etc. par 4T 3p, etc. C'est-à-dire, que l'on considérera le dividende et le diviseur, comme exprimant des toises linéaires, et par conséquent comme étant de même espèce ; et comme l'état de la question fait voir que le quotient doit aussi être de cette même espèce, c'est-à-dire, exprimer des toises et parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la règle donnée (*Arith.* 126 *et* 128).

Si la surface étoit donnée en toises quarrées et parties quarrées de la toise quarrée, alors, pour plus de simplicité, on réduiroit ces parties en toises-pieds, toises-pouces, etc. par ce qui vient d'être dit (155) ; après quoi on opéreroit comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui auroit 2T 5P de base, et 120TT 29PP 54pp de surface. On réduira (155) cette surface à 120TT 4TP 10Tp 9T l ; et la question, d'après ce qui précède, sera réduite à diviser 120T 4P 10p 9l, par 2T 5P, ce qui en suivant la règle donnée (*Arith.* 126 *et* 128) donne 42T 3P 10p 1l, $\frac{13}{17}$.

De la comparaison des Surfaces.

157. *Les surfaces des parallélogrammes sont entr'elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.*

C'est-à-dire, que la surface d'un parallélogramme, contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur, contient le produit de la base du second par sa hauteur.

Cela est évident, puisque tout parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur.

De là il est aisé de conclure, que *lorsque deux*

parallélogrammes ont même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases; et que *lorsqu'ils ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits ne changera point si l'on omet, dans chacun, le facteur qui leur est commun (*Arith.* 170).

158. Puisque les triangles sont (140) moitié de parallélogrammes de même base et de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases; et les triangles de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs cotés homologues.*

Car les surfaces des deux parallélogrammes ABCD et *abcd* (*fig.* 96 et 97) sont entr'elles (157) comme les produits des bases par leurs hauteurs; c'est-à-dire, que ABCD : *abcd* : : BC × AE : *bc* × *a e*. Mais si les parallélogrammes ABCD, *abcd* sont semblables, et si AB et *ab* sont deux côtés homologues, les triangles AEB, *a e b*, seront semblables, parce qu'outre l'angle droit en E et en *e*, ils doivent avoir de plus l'angle B égal à l'angle *b*: on aura donc (108) AE : *a e* : : AB : *ab*, ou : : BC : *b c*, à cause des parallélogrammes semblables; on peut donc (99) dans les produits BC × AE et *bc* × *ae* substituer le rapport de BC : *b c* à celui de AE : *a e*; et alors le rapport de ces produits sera celui de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donc ABCD : *abcd* : : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; et comme on peut prendre indifféremment pour base tel côté qu'on voudra, on voit donc qu'en général les surfaces des parallélogrammes semblables, sont

entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils sont moitié de parallélogrammes de même base et de même hauteur.

161. En général, *les surfaces des deux figures semblables quelconques, sont entr'elles comme les quarrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les surfaces des deux figures semblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun; alors la surface de chaque triangle de la première figure, sera à celle du triangle correspondant dans la seconde, comme le quarré d'un côté du premier, est au quarré du côté homologue du second (160); donc puisque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs quarrés doivent être aussi tous en même rapport (*Arith.* 191), chaque triangle du premier polygone sera au triangle correspondant du second, comme le quarré d'un côté quelconque du premier polygone, est au quarré du côté homologue du second; donc (*Arith.* 186) la somme de tous les triangles du premier, sera à la somme de tous les triangles du second, ou la surface du premier, à la surface du second, aussi dans ce même rapport.

162. *Les surfaces des cercles sont donc entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Car les cercles sont des figures semblables (136), dont les rayons et les diamètres sont des lignes homologues.

On doit dire la même chose des secteurs et des segmens de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables, comme de leurs contours ; les contours suivent le rapport simple des côtés (134) ; c'est-à-dire, que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc. d'un côté homologue de l'autre, le contour de la premiere sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde ; mais il n'en est pas ainsi des surfaces ; celle de la premiere figure seroit alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc. aussi grande que celle de la seconde.

On peut rendre cette vérité sensible par les Figures 98 et 99, où l'on voit (*Fig.* 98) que le parallélogramme *ABCD*, dont le côté *AB* est double du côté *AG* du parallélogramme semblable *AGIE*, contient quatre parallélogrammes parfaitement égaux à celui-ci ; et dans la Figure 99, le triangle *ADF* dont le côté *AD* est double du côté *AB* du triangle semblable *ABC*, contient quatre triangles égaux à celui-ci ; pareillement le triangle *AGK* dont le côté *AG* est triple de *AB*, contient 9 triangles égaux à *ABC*. Il en seroit de même des cercles ; un cercle qui auroit un rayon double ou triple, ou quadruple, etc. de celui d'un autre cercle, auroit 4 fois, ou 9 fois, ou 16 fois, etc. autant de surface que celui-ci.

On voit par-là, que deux Navires qui seroient parfaitement semblables, auroient des voilures dont les surfaces seroient entr'elles comme les quarrés des hauteurs des mâts, c'est-à-dire, comme nous le verrons par la suite, comme les quarrés des longueurs des Navires, ou de leurs largeurs ; et par conséquent, on peut dire que deux

deux Navires semblables, et qui présentent leurs voiles au vent de la même maniere, reçoivent des quantités de vent qui sont comme les quarrés des longueurs de ces Navires. Il n'en faut pas conclure pour cela que leurs vîtesses seront dans ce rapport. Nous verrons en Méchanique ce qui doit en être.

Au reste nous n'examinerons pas ici, si les Navires semblables doivent avoir des voilures semblables ; c'est un examen qui appartient aussi à la Méchanique.

163. Si l'on vouloit donc construire une figure semblable à une autre, et dont la surface fût à celle de celle-ci, dans un rapport donné, par exemple, dans le rapport de 3 à 2 ; il ne faudroit pas faire les côtés homologues, dans le rapport de 3 à 2 ; car alors les surfaces seroient comme 9 à 4 ; mais il faudroit faire ces côtés de telle grandeur que leurs quarrés fussent entr'eux : : 3 : 2 ; c'est à-dire, en supposant que le côté *AB* de la Figure *X* (*Fig.* 100) soit de 50^p, par exemple, il faudroit, pour trouver le côté homologue *ab* de la figure cherchée *x* (*Fig.* 101) calculer le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient $\overline{}^{2}$

3 : 2 : : 50 ou 50 × 50 est à un quatrieme terme ; ce quatrieme terme qui est $1666\frac{2}{3}$ seroit le quarré du côté *ab* ; c'est pourquoi, tirant la racine quarrée (*Arith.* 145) de $1666\frac{2}{3}$, on trouveroit 40^p, 824, c'est-à-dire, $40^p\ 9^p\ 10^l$ à peu-près, pour le côté *ab*. Quand on a un côté de la figure *x*, il est aisé de construire cette figure, selon ce qui a été dit (133).

164. *Si sur les trois côtés* AB, BC, AC, *d'un*

triangle rectangle ABC, (fig. 102.), *on construit trois quarrés* BEFA, BGHC, AILC; *celui qui occupera l'hypothénuse, vaut toujours la somme des deux autres.*

Abaissons de l'angle droit B, sur l'hypothénuse AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BDA, BDC seront chacun semblables au triangle ABC (112); et par conséquent les surfaces de ces trois triangles seront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux ABD : $\overline{AB}^2$: : BCD : $\overline{BC}^2$: : ABC : $\overline{AC}^2$ ou ABD : ABEF : : BDC : BGHC : : ABC : AILC; donc (*Arith.* 186) $ABD + BDC : ABEF + BGHC : : ABC : AILC$. Or il est évident que ABC vaut les deux parties $ABD + BDC$; donc $AILC$ vaut $ABEF + BGHC$, ce qu'on peut encore exprimer en cette manière $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puisque le quarré de l'hypothénuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que *le quarré d'un des côtés de l'angle droit, vaut le quarré de l'hypothénuse, moins le quarré de l'autre côté;* c'est-à-dire, que $\overline{BC}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, et $\overline{AB}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorsqu'on connoît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troisième.* Supposons, par exemple, que le côté AB soit de 12 pieds, le côté BC de 25; on demande l'hypothenuse AC. J'ajoute 144 qui est le quarré du côté AB, avec 625 qui est le quarré du côté BC; la somme 769 est égale au quarré de l'hypothénuse AC; donc si je tire la racine quarrée de 769, j'aurai l'hypothénuse AC; cette racine est 27, 73 à moins d'un centieme près;

donc le côté *AC* est de 27, 73 pieds, c'est-à-dire, de 27^p 8^p 9^l.

Si au contraire on donnoit l'hypothénuse et un des côtés, on trouveroit le second côté par ce qui vient d'être dit (165). Par exemple, si l'hypothénuse *AC* étoit de 54 pieds, et le côté *BC* de 42, et qu'on demandât de combien est le côté *AB*; alors de 2916 qui est le quarré de l'hypothénuse 54, je retrancherois 1764 qui est le quarré du côté *BC*; le reste 1152 seroit donc la valeur du quarré du côté *AB*; tirant la racine quarrée de 1152, cette racine qui est 33, 94 seroit la valeur de *AB*; c'est-à-dire que *AB* seroit de 33^p, 94 ou 33^p 11^p 3^l à peu-près.

Cette proposition est d'une très-grande utilité; nous aurons plus d'une occasion de nous en convaincre par la suite.

167. Puisque le quarré de l'hypothénuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle rectangle est isoscèle, comme il arrive, par exemple, dans un quarré lorsqu'on tire la diagonale AC (*fig.* 103), alors le quarré de l'hypothénuse sera double du quarré d'un de ses côtés : donc la surface d'un quarré est à celle du quarré fait sur la diagonale, comme 1 est à 2; donc (*Arith.* 192) le côté d'un quarré est à sa diagonale, comme 1 est à la racine quarrée de 2; et comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un quarré à sa diagonale, c'est-à-dire, que la diagonale est *incommensurable*, ou n'a aucune commune mesure avec son côté.

168. Dans la démonstration du n.° 164, on a vu que la similitude des triangles ABC, ADB, CDB, donne ABC : $\overline{AC}^2$: : ABD : $\overline{AB}^2$: : BDC : $\overline{BC}^2$, ou bien ABC : ADB : BDC : : $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$; mais les triangles ABC, ADB, BDC, étant tous trois de même hauteur, sont entr'eux

comme leurs bases, (158); donc ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC; donc aussi $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : BC :: AC : AD : DC$; donc *le quarré fait sur l'hypothénuse est à chacun des quarrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun des segmens correspondans à ces côtés.*

169. De là on peut conclure le moyen de faire, par lignes, ce que nous avons enseigné à faire par nombres (163); c'est-à-dire, de construire une figure *x* semblable à une figure proposée, X (*fig.* 100 et 101), et dont la surface soit à celle de celle-ci, dans un rapport donné.

On tirera (*Fig.* 104) une ligne indéfinie *DE* sur laquelle on prendra les deux parties *DP* et *PE* telles que *DP* soit à *PE* comme la surface de la figure donnée *X* (*Fig.* 100) doit être à celle de la figure cherchée *x* (*Fig.* 101), c'est-à dire, : : 3 : 2; si l'on veut que *x* soit les $\frac{2}{3}$ de *X* Sur *DE* (*Fig.* 104) comme diametre, on décrira le demi-cercle *DBE*, et ayant élevé au point *P* la perpendiculaire *PB*, on menera, du point *B* où elle rencontre la circonférence aux deux extrémités *D* et *E*, les cordes *DB*, *BE*. Sur *DB* on prendra *BA* égal à un côté *AB* de la figure *X*, et ayant mené *AC* parallele à *DE*, on aura *BC* pour le côté homologue de la figure cherchée *x*, qu'on construira ensuite comme il a été dit (133. En voici la raison : la surface de la figure *X* doit être à celle de la figure *x*, comme le quarré du côté *AB* est au quarré du côté cherché *ab*, c'est-à-dire, $: : \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; or on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre : : 3 : 2; il faut donc que $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 : : 3 : 2$. Or (*Fig.* 104) *AB* : *BC* : : *BD* : *BE*, et par conséquent (*Arith.* 191) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 : : \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle

DBE est rectangle, on a (168) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 ::$ *DP* : *PE*, c'est-à-dire, : : 3 : 2; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc *ab* doit être égal à *BC*.

170. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (168), que *les quarrés des cordes* AC, AD, *etc. menées par l'extrémité d'un diamètre* AB (fig. 105), *sont entr'eux comme les parties* AP, AO, *que coupent, sur ce diamètre, les perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes.*

Car en tirant les cordes BC et BD, on aura (168) dans le triangle rectangle ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP,$$

et dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 : AO : AB$$

donc (100)

$$\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 : AO : AP.$$

Des Plans.

171. Après avoir établi la mesure et les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l égard des plans, et celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres; c'est ce dont nous allons nous occuper actu ellemnt.

Nous ne le supposons aux plans dont il va être question, aucune grandeur ni aucune figure déterminée; nous les supposons étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représentons ici.

172. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard.*

Car le plan (5) est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

173. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tireroit dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'une et dans l'autre, se trouveroit en partie dans l'un de ces plans, et en partie élevée ou abaissée à son égard, ce qui ne peut être (172).

174. *Deux lignes* AB, CD (fig. 106), *qui se coupent, sont dans un même plan.*

Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une AB de ces lignes, et par un point pris arbitrairement dans la seconde; et comme le point d'intersection E, en tant qu'appartenant à AB, est dans ce même plan, la ligne CD a donc deux points dans ce plan; elle y est donc toute entière.

175. *La rencontre ou l'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaisseur; de plus elle doit être une ligne droite; car une ligne droite qu'on tireroit par deux points de cette intersection, est nécessairement toute entière dans chacun des deux plans; elle est donc l'intersection même.

176. *On peut donc faire passer par une même ligne droite, une infinité de plans différens,*

177. Nous disons qu'*une ligne est perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

178. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (fig. 107) *est donc perpendiculaire à toutes les lignes* BC, BC, BC, etc. *qu'on peut mener par son pied dans ce plan ;* car s'il y en avoit une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclineroit vers cette ligne, et par conséquent vers le plan.

179. *La ligne* AB (fig. 108) *étant perpendiculaire au plan* GE, *si par son pied* B, *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *et qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB, *je dis que dans ce mouvement, la ligne* BC *ne sortira point du plan* GE.

Imaginons le plan ABC arrivé dans une position quelconque ABD; si la ligne BC qui alors est en BD, n'étoit point dans le plan GE, le plan ABD rencontreroit donc le plan GE dans une ligne droite BF, à laquelle AB seroit perpendiculaire (178); BF seroit donc aussi perpendiculaire sur AB; et comme BD est supposée perpendiculaire sur AB, au même point B, il s'ensuivroit donc, qu'au même point B et dans un même plan ABD, on pourroit élever deux perpendiculaires à AB, ce qui (27) est impossible; donc BF ne peut être différente de BD; donc BC ne peut, dans son mouvement autour de AB, sortir du plan GE.

180. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (*fig.* 108) *soit perpendiculaire à un plan* GE, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD, *qui se rencontrent à son pied dans ce plan.*

Car si l'on conçoit que le plan de l'angle droit ABC, tourne autour de AB, la ligne BC tracera (170) un plan auquel AB sera perpendiculaire ; or je dis que ce plan ne peut être autre que le plan GE des deux lignes BC et BD ; car l'angle ABD étant droit, ainsi que l'angle ABC, la ligne BC, en tournant autour de AB, aura nécessairement la ligne BD pour une de ses positions ; donc BD est dans le plan tracé par BC, donc AB est perpendiculaire au plan CBD.

181. *Si d'un point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 109) *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan, et qu'ayant joint les points* B *et* I *de la perpendiculaire et de l'oblique, par une droite* BI, *on mène à cette dernière, une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE, *je dis que* AI *sera aussi perpendiculaire à* CD.

Prenons, à commencer du point I, les parties égales IC. ID, et tirons les lignes BC, et BD ; ces deux dernières lignes seront égales entr'elles (29) : donc les deux triangles ABC, ABD seront égaux ; car outre l'angle ABC égal à l'angle ABD, comme étant chacun droit, le côté AB est commun, et BC est égal à BD selon ce qu'on vient de prouver ; ils ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; ils sont donc égaux ; donc AD est égal à AC; la ligne AI a donc deux points A et I également éloignés du point C et du point D ; elle est donc perpendiculaire sur CD (30).

182. *Un plan* est dit *perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni d'un côté ni de l'autre de ce dernier.

183. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 110) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

184. *Un plan* CK *est perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci*; car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan GE.

185. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE, *on mène une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car si elle ne l'étoit pas, on pourroit par le point B où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan GE, et conduire par cette perpendiculaire et par la commune section CD, un plan qui (184) seroit perpendiculaire au plan GE; on pourroit donc, par une même ligne CD, prise dans le plan GE, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci; ce qui est impossible (183); donc AB est perpendiculaire au plan GE.

186. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* AB *qu'on élèvera sur le plan* GE, *par un point* B *de la section commune sera nécessairement dans le plan* CK.

De cette proposition, il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM, *à un même plan* GE, *sont parallèles.*

Car si l'on joint leurs pieds B et L par une ligne BL, et que par cette ligne et par AB on conduise un plan CK, ce plan sera perpendiculaire au plan GE (184); et puisque LM est alors une perpendiculaire au plan GE, menée par un point L du plan CK, elle sera donc dans le plan

CK (186) ; or puisque les deux lignes AB, LM sont toutes deux dans un même plan et perpendiculaires à la même ligne BL, elles sont parallèles (36 et 37).

187. Donc si deux droites AB, CD (*fig.* 112) *sont parallèles chacune à une troisième* HF, *elles seront aussi parallèles entr'elles ;* car les lignes AB, HF étant parallèles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan GE ; par la même raison, CD et HF peuvent être perpendiculaires au même plan GE ; donc AB et CD étant perpendiculaires à un même plan, seront parallèles.

188. *Si deux plans* CK, NL (fig. 111) *sont perpendiculaires à un troisième* GE, *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on éléveroit par le point B sur le plan GE, doit être dans chacun de ces deux plans (186) ; elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

189. On appelle *angle-plan*, l'ouverture de deux plans GF, GE (fig. 113) qui se rencontrent ; cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans GF, GE, n'est autre chose que la quantité dont le plan GF auroit dû tourner autour de AG, pour venir dans sa situation actuelle, s'il avoit été d'abord couché sur le plan GE.

De là il est aisé de voir que si par un point B pris dans la commune section AG, on mène dans

le plan GE la perpendiculaire BD à AG, et dans le plan GF la perpendiculaire BC à la même ligne AG, l'angle formé par les deux plans, est la même chose que l'angle formé par les deux lignes BD et BC ; car il est facile de voir que pendant le mouvement du plan GF, la ligne BC s'écarte de la ligne BD sur laquelle elle étoit couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de *BD*, précisément selon la même loi selon laquelle le plan *GF* s'écarte du plan *GE*.

191. Donc *un angle-plan a même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune section, et d'un même point de cette ligne.*

De là il est si aisé de conclure les propositions suivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

192. *Un plan qui tombe sur un autre plan, forme deux angles qui, pris ensemble, valent* 180 *degrés.*

193. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui passent tous par une même droite, valent* 360 *degrés.*

194. *Deux plans qui se coupent, font les angles opposés au sommet, égaux.*

195. On appelle *plans parallèles*, ceux qui ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongés.

196. *Les plans parallèles sont donc par-tout également éloignés.*

197. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan* (fig. 114), *les intersections* AB, CD *seront deux droites parallèles ;* car comme elles sont dans un même plan *ABCD*, elles ne pourroient manquer de se rencontrer si elles n'étoient pas parallèles, et alors il est évident que les plans se rencontreroient aussi.

198. *Deux plans parallèles, coupés par un troisième, ont les mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième, que deux lignes droites parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.* C'est une suite de ce qui a été dit (191).

Propriétés des lignes droites coupées par des Plans parallèles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 115), *on tire à différens points* K, L, M *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *et qu'on coupe ces droites par un plan* ge *parallèle au plan* GE; *je dis*, 1.° *que ces droites seront coupées proportionnellement ;* 2.° *que la figure* klm *sera semblable à la figure* KLM.

Ne supposons d'abord que trois points K, L, M, puisque les droites *kl*, *lm*. *mk* sont les intersections des plans IKL, ILM, IKM, avec le plan *ge*, elles sont parallèles aux droites KL, LM, MK, intersections des mêmes plans avec le plan GE (197) : donc les triangles IKL, ILM, IMK, sont semblables aux triangles *Ikl*, *Ilm*, *Imk*, chacun à chacun; donc *IK : ik : : KL : kl : : IL : Il : : LM : Lm :: IM : Im : : MK : mk ;* or, 1.° si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui par-

tent du point I, on aura $IK : Ik :: IL, Il :: IM : Im$; donc les droites IK, IL, IM sont coupées proportionnellement.

2.° Si de la même première suite de rapports égaux, on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura $KL : kl :: LM : lm :: KM : km$; donc les deux triangles KLM, klm sont semblables, puisqu'ils ont les côtés proportionnels.

Supposons maintenant, tel nombre de points A, B, C, D, F, *etc.* qu'on voudra; on démontrera précisément de la même manière, que les droites IA, IB, IC, *etc.* sont coupées proportionnellement; et si l'on imagine les diagonales AC, AD, etc. *ac*, *ad*, etc. menées des deux angles correspondans A et *a*, on démontrera, aussi de la même manière, que les triangles ABC, ACD, etc. sont semblables aux triangles *abc*, *acd*, etc. chacun à chacun; donc les deux polygones ABCDF, *abcdf* étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables (123).

200. Puisque les deux figures KLM, *klm* sont semblables, concluons-en que l'angle KLM est égal à l'angle *klm*, et par conséquent, *si deux droites* KL, LM *qui comprennent un angle* KLM, *sont parallèles à deux droites* kl, lm *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan*: nous avons donné cette même proposition (43); mais nous supposions que les deux angles étoient dans un même plan.

201. Il suit encore, de ce que les deux figures ABCDF et *abcdf* sont semblables, et de ce

que les deux figures KLM, *klm* sont semblables; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm *sont entr'elles comme celles des deux figures* ABCDF, KLM.

Car ABCDF : *abcdf* : : $AB^2 : ab^2$ (161).

Mais les triangles semblables IAB, *Iab* donnent AB : *ab* : : IA : *Ia*.

Et par conséquent (*Arithm.* 191) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 : : \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$ ou (199) : : $\overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, ou (à cause des triangles semblables IML, *Iml*) : : $\overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; et par conséquent (161) : : KLM : *klm*; donc ABCDF : *abcdf* : : KLM : *klm*, ou (*Arith.* 182) ABCDF : KLM : : *abcdf* : *klm*.

202. Cette démonstration fait voir en même temps que les surfaces ABCDF, *abcdf* sont entr'elles comme les quarrés des deux droites IA et *Ia* tirées du point *I* à deux points correspondans de ces deux figures, et par conséquent (199) comme les quarrés des hauteurs ou perpendiculaires IP, *Ip* menées du point *I* sur les plans GE et *ge*.

Concluons donc 1.° que si les deux surfaces ABCDF, KLM étoient égales, les deux surfaces *abcdf*, *klm* seroient aussi égales.

2.° Que tout ce que nous venons de dire, auroit encore lieu si le point *I*, au lieu d'être commun aux droites IA, IB, IC, etc. et aux droites IM, IL, etc. étoit différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

TROISIÈME SECTION.

Des Solides.

203. NOUS avons nommé *Solides* ou *Volumes* ou *Corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions, *Longueur*, *Largeur* et *Profondeur*.

Nous allons nous occuper de la mesure et des rapports des solides.

Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes; et de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*.

Les solides terminés par des surfaces planes, se distinguent en général par le nombre et la figure des plans qui les renferment; ces plans doivent être, au moins, au nombre de quatre.

204. Un solide, dont deux faces opposées sont deux plans égaux et parallèles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *Prisme*. *Voyez fig.* 116, 117, 118, 119.

On peut donc regarder le prisme comme engendré par le mouvement d'un plan BDF, qui glisseroit parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite AB (*fig.* 116).

Les deux plans parallèles se nomment les *bases* du prisme, et la perpendiculaire LM menée d'un point de l'une des bases, sur l'autre base, se nomme la *hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du prisme il suit, qu'à quelqu'endroit qu'on coupe un prisme,

par un plan parallèle à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que BA, qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes* du prisme.

Le prisme est *droit*, lorsque les arêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur. *Voyez fig.* 117 et 119.

Au contraire le prisme est *oblique* lorsque ses arêtes inclinent sur la base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base; si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire*, (*fig.* 116); si la base est un quadrilatère, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*fig.* 117); et ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires on distingue plus particuliérement le *parallélipipède* et le *cube*.

Le *parallélipipède* est un prisme quadrangulaire, dont les bases, et par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes; et lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, et qu'en même-temps le prisme est droit, on l'appelle *parallélipipède rectangle*. Voyez *fig.* 117.

Le parallélipipède rectangle prend le nom de *cube*, lorsque la base est un quarré, et que l'arête AB, (*fig.* 119) est égale au côté de ce quarré.

Le cube est donc un solide compris sous six quarrés égaux; c'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux et parallèles, et la surface que traceroit une ligne AB (*fig.* 120 et 121), qui glisseroit parallèlement à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre est *droit* quand la ligne CF (*fig.* 120) qui joint les centres des deux bases

bases opposées, est perpendiculaire à ces cercles; cette ligne CF s'appelle l'*axe* du cylindre ; et le cylindre est *oblique*, quand cette même ligne CF incline sur la base.

On peut considérer le cylindre droit comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle FCDE tournant autour de son côté CF.

206. La *pyramide* est un solide compris sous plusieurs plans, dont l'un, qu'on appelle la *base*, est un polygone quelconque, et les autres, qui sont tous des triangles, ont pour bases les côtés de ce polygone, et ont tous leurs sommets réunis en un même point qu'on appelle le *sommet* de la pyramide. *Voyez fig.* 122, 123, 124.

La perpendiculaire AM, menée du sommet sur le plan qui sert de base, s'appelle la *hauteur* de la pyramide.

Les pyramides se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases, en sorte que celle qui a pour base un triangle, est appellée *pyramide triangulaire*; celle qui a pour base un quadrilatère, *pyramide quadrangulaire*; et ainsi de suite.

La pyramide est dite *régulière*, lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même-temps la perpendiculaire AM (*fig.* 124) menée du sommet, passe par le centre de ce polygone.

La perpendiculaire AG, menée du sommet A sur l'un DE, des côtés de la base, s'appelle *apothême*.

Il est clair que tous les triangles qui aboutissent au point A, sont égaux et isoscèles ; car ils ont tous les bases égales, et les arêtes AB, AC, AD, etc. sont toutes égales, puisque ce sont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire AM (29).

Il n'est pas moins évident que tous les apothêmes sont égaux.

207. Le *cône*, (*fig.* 125 *et* 126) est le solide renfermé par le plan circulaire BGDH qu'on appelle la *base* du cône, et par la surface que traceroit une ligne AB tournant autour du point fixe A, et rasant toujours la circonférence BGDH.

Le point A s'appelle le *sommet* du cône.

La perpendiculaire menée du sommet sur le plan de la base, se nomme la *hauteur* du cône ; et le cône est *droit* ou *oblique*, selon que cette perpendiculaire passe (*fig.* 125), ou ne passe point (*fig.* 126) par le centre de la base.

On peut concevoir le cône droit comme engendré par le mouvement du triangle rectangle ACD, (*fig.* 125) tournant autour du côté AC.

208. La *sphère* est un solide terminé, de toutes parts, par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un même point.

On peut considérer la sphère comme le solide qu'engendreroit le demi-cercle ABD, (*fig.* 128) tournant autour du diamètre AD.

Il est évident que toute *coupe*, ou toute *section* de la sphère, par un plan, est un cercle. Si le plan passe par le centre, la section s'appelle *grand cercle* de la sphère. Et on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute section de la sphère par un plan qui ne passe point par le centre.

Le *secteur sphérique* est le solide qu'engendreroit le secteur circulaire BCA tournant autour du rayon AC. La surface que décriroit l'arc AB dans ce mouvement, s'appelle *calotte sphérique*.

Le *segment sphérique* est le solide qu'engendreroit

le demi-segment circulaire AFB, tournant autour de la partie AF du rayon.

Des solides semblables.

209. Les *solides semblables* sont ceux qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées dans les deux solides.

210. *Les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues, sont donc des lignes et des points semblablement placés dans les deux solides;* car les arêtes homologues, et les sommets des angles solides homologues, sont des lignes et des points semblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puisque ces faces sont supposées semblables; or ces faces sont semblablement disposées dans les deux solides; donc, etc.

211. Donc *les triangles qui joignent un angle solide, et les extrémités d'une arête homologue, dans chaque solide, sont des figures semblables, et semblablement disposées dans les deux solides;* car les extrémités des arêtes homologues sont elles-mêmes les sommets d'angles solides homologues, qui sont (210) semblablement placés à l'égard des solides.

212. *Les diagonales qui joignent deux angles solides homologues, sont donc entr'elles comme les arêtes homologues de ces solides;* car elles sont les côtés des triangles semblables dont on vient de parler, et qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues.

Donc deux solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, par des plans conduits par des angles homologues, et par deux arêtes homologues; car les faces de ces pyramides seront composées de triangles semblables, et semblablement disposés dans les deux solides (211); et les bases de ces mêmes pyramides seront aussi semblables, puisqu'elles sont des faces homologues des deux solides; donc (209) ces pyramides seront semblables.

213. *Si de deux angles homologues on abaisse des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires seront entr'elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homologues (210), doivent nécessairement être à des distances de ces faces, qui soient entr'elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la mesure des Surfaces des Solides.

214. Les surfaces des prismes et des pyramides, étant composées de parallélogrammes, de triangles et de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la manière dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (145, 147 et 149) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet, quelques conséquences, qui non-seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous seront encore utiles pour évaluer

les surfaces des cylindres, des cônes, et même de la sphère.

215. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme, par le contour d'une section* bdfhk, (fig. 118) *faite par un plan auquel cette arête seroit perpendiculaire.*

Car puisque l'arête AB est supposée perpendiculaire au plan *b d f h k*, les autres arêtes qui sont toutes parallèles à celles-là, seront aussi perpendiculaires au plan *b d f h k*; donc réciproquement les droites *bd*, *df*, *fh*, *hk*, etc. seront perpendiculaires chacune sur l'arête qu'elle coupe; en considérant donc les arêtes comme les bases des parallélogrammes qui enveloppent le prisme, les lignes *bd*, *df*, *fh* en seront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la surface du prisme, multiplier l'arête AB, par la perpendiculaire *bd*; l'arrête CD, par la perpendiculaire *df*, et ainsi de suite; et ajouter tous ces produits; mais comme toutes les arêtes sont égales, il est évident qu'il revient au même d'en multiplier une seule AB, par la somme de toutes les hauteurs, c'est-à-dire, par le contour *b d f h k*.

216. Quand le prisme est droit, la section *b d f h k* ne diffère pas de la base BDFHK; et l'arête AB, est alors la hauteur du prisme; donc *la surface d'un prisme droit (en n'y comprenant point les deux bases), est égale au produit du contour de la base, multiplié par la hauteur.*

217. Nous avons vu ci-dessus (136) qu'on pouvoit considérer le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme, dont le nom-

bre des parallélogrammes qui composent la surface, seroit infini ; donc,

La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base. Nous avons vu (152) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier sa longueur AB, par la circonférence de la section *bgdh* (*fig.* 121), cette section étant faite comme il a été dit (215). La méthode pour déterminer la longueur de cette section, dépend de connoissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici ; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer mécaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente), qu'on aura soin d'assujettir dans un plan auquel la longueur AB de ce cylindre, soit perpendiculaire.

218. *Pour la pyramide*, si elle n'est pas régulière, il faut chercher séparément la surface de chacun des triangles qui la composent, et ajouter ces surfaces.

Mais si elle est régulière, on peut avoir sa surface plus brièvement, en multipliant le contour de sa base, par la moitié de l'apothême AG (*fig.* 117); car tous les triangles étant de même hauteur, il suffit de multiplier la moitié de la hauteur commune, par la somme de toutes les bases.

219. En considérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'est, au fond, qu'une pyramide régulière, dont la surface (non compris celle de la base) est composée d'une infinité de triangles, et que, par conséquent, *la surface convexe d'un cône droit, est égale au produit de la circon-*

férence de sa base, par la moitié du côté AB *de ce cône* (*Fig.* 125).

A l'égard de la surface du cône oblique, elle dépend d'une Géométrie plus composée ; ainsi nous n'en parlerons point ici. Au reste, la manière dont nous venons de considérer le cône, donne le moyen de le mesurer à peu près, lorsqu'il est oblique. Il faut partager la circonférence de la base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite ; et alors on calculera la surface, comme pour une pyramide qui auroit autant de triangles qu'on a d'arcs.

220. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit, dont les bases opposées* BGDH, bgdh (*fig.* 127) *sont parallèles, il faut multiplier le côté* Bb *de ce tronc, par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.*

En effet, on peut concevoir cette surface, comme l'assemblage d'une infinité de trapèzes tels que *EF*, *fe* dont les côtés *Ee*, *Ff* tendent au sommet *A* ; or la surface de chacun de ces trapèzes, est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées *EF*, *ef*, multipliée par la distance de ces deux bases (148) ; mais cette distance ne diffère pas des côtés *Ee*, *Ff* ou *Bb* ; donc pour avoir la somme de tous ces trapèzes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que *EF*, *ef*, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne *Bb* hauteur commune de tous ces trapèzes.

221. Si par le milieu *M* du côté *Bb*, on conduit un plan parallèle à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées,

puisque son diamètre *MN* (148) est la moitié de la somme de ceux des bases, et que (136) les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres. Donc *la surface d'un cône tronqué, à bases parallèles, est égale au produit du côté du tronc, par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

222. *La surface d'une sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliés par le diamètre.*

Concevez la demi-circonférence *AKD* (*fig.* 129) divisée en une infinité d'arcs ; chacun de ces arcs, tel que *KL*, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde.

Menons par les extrémités de *KL*, les perpendiculaires *KE*, *LF* au diamètre *AD*; et par le milieu *I* de *KL* ou de sa corde, menons *IH* parallèle à *KE*, et le rayon *IC* ; ce rayon sera perpendiculaire sur *KL* (52); tirons enfin *KM* perpendiculaire sur *IH* ou sur *LF*. Si l'on conçoit que la demi-circonférence *AKD* tourne autour de *AD*, elle engendrera la surface de la sphère, et chacun de ses arcs *KL* engendrera la surface d'un cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphère. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de *KM* ou *EF* multiplié par la circonférence qui a pour rayon *IC* ou *AC*.

Le triangle *KML* est semblable au triangle *IHC*, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (112) cette proportion *KL* : *KM* : : *IC* : *IH* ; ou, puisque (136) les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons) *KL* : *KM* : : cir. *IC* : cir. *IH* ;

(*) donc puisque (*Arith.* 168) dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, KL × cir. IH est égal à KM × cir. IC, ou (ce qui revient au même est égal à EF × cir. AC. Or (221) le premier de ces produits exprime la surface du cône tronqué engendré par KL : donc ce cône tronqué est égal à EF × cir. AC, c'est-à-dire, au produit de sa hauteur EF par la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Et comme en prenant tout autre arc que KL, on démontreroit la même chose et de la même manière, on doit conclure que la somme des petits cônes tronqués qui composent la surface de la sphère, est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle somme compose évidemment le diamètre. Donc la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.

223. Si l'on conçoit un cylindre (*fig.* 130) qui entoure la sphère en la touchant, et qui ait pour hauteur le diamètre de cette sphère; c'est-à-dire, si l'on conçoit un cylindre circonscrit à la sphère, on pourra conclure que la *surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit ;* car (217) la surface de ce cylindre est égale au produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur; or la circonférence de la base est celle d'un grand cercle de la sphère, et la hauteur est égale au diamètre; donc, etc.

224. Puisque (145) pour avoir la surface d'un

(*) Par ces expressions *cir. IC*, *cir. IH*, nous entendons la circonférence qui a pour rayon *IC*, la circonférence qui a pour rayon *IH*.

cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diamètre, et que pour avoir celle de la sphère, il faut multiplier la circonférence par le diamètre, on doit donc dire que *la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.*

225. La démonstration que nous venons de donner de la mesure de la surface de la sphère, prouve également que pour avoir la surface convexe du segment sphérique qu'engendreroit l'arc *AL* (*fig.* 131) tournant autour du diamètre *AD*, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *AI* de ce segment; et que pour avoir celle d'une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles tels que *LKM*, *NRP*, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *IO* de cette portion de sphère. Car on peut considérer ces surfaces, ainsi qu'on l'a fait pour la sphère entière, comme composées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun est égal au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Des rapports des Surfaces des Solides.

226. Si deux solides dont on a dessein de comparer les surfaces, sont terminés par des plans dissemblables et irréguliers, le seul parti qu'il y ait à prendre, pour trouver le rapport de leurs surfaces, est de calculer séparément la surface de chacun en mesures de même espèce, et de comparer le nombre des mesures de l'une, au nombre des mesures de l'autre; c'est-à-dire, par exemple, le nombre des pieds quarrés de l'une, au nombre des pieds quarrés de l'autre.

227. *Les surfaces des prismes (en n'y comprenant point les bases opposées) sont entr'elles comme les produits de la longueur de ces prismes, par le contour de la section faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces surfaces sont égales à ces produits (215).

228. Donc si *les longueurs sont égales, les surfaces des prismes seront entr'elles comme le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur de chacun.* Car le rapport des produits de la longueur, par le contour de cette section, ne changera point si l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en est facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur, sont entr'elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Et si, au contraire, *les contours des bases sont les mêmes, et les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits, sont entr'elles comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces bases.*

Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base, par la moitié du côté du cône (219), doivent être entr'elles comme ces produits, et par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entr'elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diamètres, on peut (99) substituer dans ces produits, le rapport des rayons, ou celui des diamètres, à celui des circonférences.

231. *Les surfaces des solides semblables, sont*

entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues.

Car elles sont composées de plans semblables dont les surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, lesquelles lignes sont lignes homologues des solides, et proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les surfaces de deux sphères, sont entr'elle- comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres;* car la surface d'une sphère étant quadruple de celle de son grand cercle, les surfaces de deux sphères doivent être entr'elles comme le quadruple de leurs grands cercles; ou simplement comme leurs grands cercles; c'est-à-dire (162) comme les quarrés des rayons ou des diamètres.

De la solidité des Prismes.

233. Pour fixer les idées sur ce qu'on doit entendre par la *solidité* d'un corps, il faut se représenter, par la pensée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur, et concevoir que la capacité d'un corps est entiérement remplie de pareils cubes que nous nommerons *points solides.* La totalité de ces points forme ce que nous entendons par solidité d'un corps.

234. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, quelques différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Car si l'on imagine ces corps, coupés par des plans parallèles à leurs bases, en tranches infiniment minces, et d'une épaisseur égale à celle des points solides dont on peut imaginer que ces corps sont remplis, il est visible que, dans chacun, chaque section étant égale à la base (204), le nombre des points solides, dont chaque tranche sera composée, sera par-tout le même, et égal au nombre de points superficiels de la base : et comme on suppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches; ils contiendront donc en totalité, le même nombre de points solides; donc ils sont égaux en solidité.

De la mesure de la solidité des Prismes et des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage, est principalement utile lorsque, pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides dans leurs élémens mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces ; nous aurons encore occasion de les considérer de cette manière. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient; car on conçoit très-bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps ; on cherche à déterminer combien de fois, le corps dont il s'agit, contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipède rectangle ABCDEFGH (fig. 132) on a pour objet de

connoître combien ce parallépipède contient de cubes tels que le cube connu x ; c'est ordinairement en mesures cubiques, qu'on évalue les solidités des corps.

Pour connoître la solidité du parallélipède rectangle ABCDEFGH, il faut chercher combien sa base EFGH contient de parties quarrées telles que *efgh* ; chercher pareillement combien la hauteur AH contient de fois la hauteur *ah* ; et multipliant le nombre des parties quarrées de EFGH par le nombre des parties de AH, le produit exprimera combien le parallélipipède proposé contient de cubes tels que x : c'est-à-dire, combien il contient de pieds-cubes, ou de pouces-cubes, etc. si le côté *ah* du cube x est d'un pied ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface EFGH autant de cubes tels que x, qu'il y a de quarrés tels que *efgh* dans la base EFGH. Tous ces cubes formeront un parallélipipède dont la hauteur HL sera égale à *ah* ; or il est évident qu'on pourra placer dans le solide ABCDEFGH autant de parallélipipèdes tels que celui-là, que la hauteur HL sera contenue de fois dans AH ; donc il faut répéter ce parallélipipède, ou le nombre des cubes répandus sur EFGH, autant de fois qu'il y a de parties dans AH ; ou puisque le nombre de ces cubes est le même que le nombre des quarrés contenus dans la base, il faut multiplier le nombre des quarrés contenus dans la base, par le nombre des parties de la hauteur, et le produit exprimera le nombre de cubes contenus dans le parallélipipède proposé.

236. Puisqu'on a démontré (234) que les prismes de bases égales et de hauteurs égales, sont

égaux en solidité, il suit de cette proposition, et de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre de mesures cubes que renfermeroit le prisme quelconque ACEGIKBDFH, (*fig.* 118) il faut évaluer sa base KBDFH en mesures quarrées, et sa hauteur LM en parties égales au côté du cube qu'on prend pour mesure, et multiplier le nombre des mesures quarrées qu'on aura trouvées dans la base, par le nombre des mesures linéaires de la hauteur; ce qu'on exprime ordinairement en disant : *La solidité d'un prisme quelconque est égal au produit de la surface de sa base, par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (145) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est ainsi qu'on vient de le voir, un solide (dont le nombre des cubes est le même que le nombre des quarrés de la base) qu'on répète autant de fois que sa hauteur est comprise dans celle du solidè total, c'est-à-dire, autant de fois qu'il est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précède, que *pour avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base, par la hauteur de ce cylindre*, puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur que lui (234).

De la solidité des Pyramides.

238. Rappellons-nous ce qui a été dit (201)

et en l'appliquant aux pyramides ; nous en conclurons que si l'on coupe deux pyramides IABCDF, IKLM, (*fig.* 115), de même hauteur, par un même plan *ge*, parallèle au plan de leur base (*), les sections *abcdf*, *klm*, seront entr'elles dans le rapport des bases ABCDF; KLM, et seront par conséquent égales si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides, coupées par un plan parallèle au plan *ge*, et infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides, comprises entre ces deux plans infiniment voisins, doivent être aussi entr'elles dans le rapport des bases ; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur, ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes.

Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre ; ainsi les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, et par conséquent les solidités des pyramides, seront entr'elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur, sont entr'elles comme les bases de ces pyramides*, et par conséquent *les pyramides de bases égales et de hauteurs égales sont égales en solidité, quelques différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Mesure de la solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps, n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, et qu'on ait placé les bases sur un même plan *GE*.

autre

autre corps connu, ou, en général, chercher quel est son rapport avec un autre corps connu; il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes; c'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur qu'elle.*

La démonstration de cette proposition se réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur qu'elle; car on peut toujours concevoir un prisme comme composé d'autant de prismes triangulaires, et une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone, qui sert de base à l'un et à l'autre, *Voyez fig.* 118.

Or, voici comment on peut se convaincre de la vérité de la proposition, pour la pyramide triangulaire. Soit ABCDEF, (*fig.* 133), un prisme triangulaire : concevez que sur les faces AE, CE de ce prisme, on ait tiré les deux diagonales BD, BF, et que suivant ces diagonales on ait conduit un plan BDF; ce plan détachera du prisme une pyramide de même base et de même hauteur que ce prisme, puisqu'elle a son sommet en B dans la base supérieure, et qu'elle a pour base, la base même inférieure DEF du prisme : on voit cette pyramide isolée dans la *figure* 134; et la *figure* 135 représente ce qui reste du prisme.

On peut se représenter ce reste, comme renversé ou couché sur la face ADFC, et alors on voit que c'est une pyramide quadrangulaire, qui a pour base le parallélogramme ADFC, et pour sommet

le point B; donc, si l'on conçoit que dans la base ADFC on ait tiré la diagonale CD, on pourra se représenter que la pyramide totale ADFCB est composée de deux pyramides triangulaires ADCB, CFDB qui auront pour bases les deux triangles égaux ACD, CDF, et pour sommet commun le point B, et qui, par conséquent, seront égales (238). Or de ces deux pyramides, l'une, savoir la pyramide ADCB peut être conçue comme ayant pour base le triangle ABC, c'est-à-dire, la base supérieure du prisme, et pour sommet le point D qui a appartenu à la base inférieure; cette pyramide est donc égale à la pyramide DEFB (*fig.* 134), puisqu'elle a même base et même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides DEFB, ADCB, CFDB sont égales entr'elles; et puisque réunies elles composent le prisme, il faut en conclure que chacune est le tiers du prisme; ainsi la pyramide DEFB est le tiers du prisme ABCDEF de même base et de même hauteur qu'elle.

241. Puisqu'un cône peut être considéré comme une pyramide, dont le contour de la base auroit une infinité de côtés; et le cylindre, comme un prisme, dont le contour de la base auroit aussi une infinité de côtés; il faut en conclure, qu'*un cône, droit ou oblique, est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases opposées sont paral-

lèles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée, et alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entière et de la pyramide retranchée, et par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la *figure* 115, si je veux avoir la solidité du tronc KLM, *klm*, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface KLM, par le tiers de la hauteur IP; multiplier pareillement la surface *klm* par le tiers de la hauteur *Ip*, et retrancher ce dernier produit du premier; mais comme on ne connoît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée, voici comment on déterminera l'une et l'autre. On a vu ci-dessus (199), que les lignes IL, IM, IP, etc. sont coupées proportionnellement par le plan *ge*, et qu'elles sont à leurs parties *Il*, *Im*, *Ip*, comme LM : *lm*; on aura donc LM : *lm* : : IP : *Ip*;

Donc (*Arith.* 174) LM—*lm* : LM : : IP—*I*P : IP.

C'est-à-dire, LM—*lm* : LM : : *Pp* : IP.

Or, quand on connoît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés LM, *lm*, et la hauteur *Pp*; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrième terme IP (*Arith.* 179) ou la hauteur de la pyramide totale, et en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la Solidité de la Sphère, de ses Secteurs, et de ses Segmens.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphère, il faut multiplier la surface par le tiers du rayon.*

Car on peut considérer la surface de la sphère comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun sert de base à une pe-

tite pyramide qui a son sommet au centre de la sphère, et qui, par conséquent, a pour hauteur le rayon ; puis donc que chacune de ces petites pyramides est égale (242) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire, par le tiers du rayon, elles seront toutes ensemble égales au produit de la somme de toutes leurs bases par le tiers du rayon, c'est-à-dire, égales au produit de la surface de la sphère, par le tiers du rayon.

245. Puisque la surface de la sphère est (242) quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *on peut donc, pour avoir la solidité d'une sphère, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la surface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la surface d'un des grands cercles, ou enfin les $\frac{2}{3}$ du diamètre par la surface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la solidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il falloit multiplier la surface de la base par la hauteur ; s'il s'agit donc du cylindre circonscrit à la sphère (*fig.* 130), on peut dire que la solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphère, par le diamètre ; or celle de la sphère (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les $\frac{2}{3}$ du diamètre ; donc *la solidité de la sphère n'est que les $\frac{2}{3}$ de celles du cylindre circonscrit.*

247. La calotte sphérique AGBHEA qui sert de base à un secteur sphérique CBGEHA, (*fig.* 128) peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, et par conséquent le secteur sphérique, lui-même, peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides, qui ont toutes pour hauteur

le rayon, et dont la totalité des bases forme la surface de ce secteur ; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte, par le $\frac{1}{3}$ du rayon.* Nous avons vu (225), comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, comme il vaut le secteur CBGEHA moins le cône CBGEH, ayant enseigné (247) et (242) la maniere de trouver la solidité de ces deux corps, il ne nous reste rien à dire sur cet article.

De la mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composés de pyramides, qui aient pour bases ces surfaces planes, et pour sommet commun, l'un des angles du solide dont il s'agit ; mais outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive et moins propre pour la pratique, que la suivante, que nous exposerons ici d'autant plus volontiers qu'elle peut être employée utilement à la mesure de la solidité de la carene des vaisseaux, comme nous le ferons voir quand nous aurons établi les propositions suivantes.

250. Nous appellerons *prisme tronqué*, le solide ABCDEF (*fig.* 136), qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan ABC incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué, est composé de trois pyramides, qui ont chacune pour base, la*

base DEF *du prisme, et dont la première a son sommet en* B, *la seconde en* A, *et la troisième en* C.

Avec une légère attention, on peut se représenter le prisme tronqué, comme composé de deux pyramides, l'une triangulaire, qui aura son sommet au point B, et pour base le triangle D E F; la seconde qui aura aussi son sommet au point B, mais qui aura pour base le quadrilatère ADFC.

Si l'on tire la diagonale A F, on peut se représenter la pyramide quadrangulaire B A D F C comme composée de deux pyramides triangulaires B A D F, B A C F; or la pyramide BADF est égale en solidité à une pyramide E A D F, qui ayant la même base A D F, auroit son sommet au point E; car la ligne BE étant parallèle au plan ADF, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide E A D F peut être considérée comme ayant pour base EDF, et son sommet au point A; voilà donc, jusqu'ici, deux des trois pyramides, dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide BACF est équivalente à une pyramide qui auroit aussi pour base EDF, et qui auroit son sommet en C; or c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale CD, et faisant attention que la pyramide BACF doit être égale à la pyramide EDCF; parce que ces deux pyramides ont leurs sommets B et E dans la même ligne BE parallèle au plan ACFD de leurs bases; et que ces bases ACF et CFD sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base CF, et qui sont compris entre les parallèles AD et CF; ainsi, la pyramide BACF est égale à la pyramide EDCF, mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base DEF, et son sommet en C; donc,

en effet, le prisme tronqué est composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle DEF, et dont la premiere a son sommet en B, la seconde en A, la troisième en C.

252. *Donc, pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser de chacun des angles de la base supérieure, une perpendiculaire sur la base inférieure, et multiplier la base inférieure par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, et même pour d'autres solides; si l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un solide, terminé par des surfaces planes, on mene sur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires, on fera naître autant de prismes tronqués qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer, d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes, se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes; nous n'entrerons pas dans ce détail; nous nous bornerons à en tirer une conséquence utile à notre objet.

254. Soit donc *ABCEDFGH* (*Fig.* 137) un solide composé de deux prismes triangulaires tronqués *ABCEFG*, *ADCEHG*, dont les arêtes *AE*, *BF*, *CG*, *DH* soient perpendiculaires à la base, et qui soient tels que les bases *FGH*, *EHG* forment le parallélogramme *EFGH*, et que les bases supérieures soient, pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la base *EFGH*. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus

(252) que le solide $ABCDEFG$ est égal au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$ car le prisme tronqué $ABCEFG$ est égal (252) au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+AE+GC}{3}$; et par la même raison, le prisme tronqué $ADCEHG$ est égal au triangle EHG, ou (ce qui revient au même) au triangle EFG multiplié par $\frac{AE+GC+HD}{3}$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués, est égale au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$.

Soit maintenant un solide (*Fig.* 138) compris entre deux plans $ABLM$, $ablm$ parallèles, deux autres plans $ABba$, $MLlm$, parallèles entr'eux et perpendiculaires aux deux autres, un plan $BLlb$ perpendiculaire à ceux-là; et enfin la surface courbe $AHMmha$; et concevons ce solide coupé par des plans CD, Ef, Gh, etc. paralleles à $ABba$, également distants les uns des autres, et assez près pour qu'on puisse regarder AD, ad, DF, df, etc. comme des lignes droites: supposons enfin que les deux plans $ABLM$, $ablm$ sont assez près l'un de l'autre pour qu'on puisse regarder, sans erreur sensible, les sections Dd, Ff, Hh, etc. comme des lignes droites; il est visible que les solides partiels $ADdabBCc$, $DEfdcCEe$, etc. sont dans le cas du solide de la *Figure* 137. Donc la totalité de ces solides sera égale aux triangles bBC multiplié par $\frac{AB+2ab+2CD+cd}{3}+\frac{CD+2cd+2EF+ef}{3}+\frac{EF+2ef+2GH+gh}{3}+\frac{GH+2gh+2IK+ik}{3}+\frac{IK+2ik+2LM+lm}{3}$,

c'est-à-dire, en réunissant les quantités semblables, sera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$; et comme le triangle bBC est égal à $\frac{Bb \times BC}{2}$, le solide entier sera égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$.

Dans la vue de rendre cette expression plus simple, remarquons que si au lieu de $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parentheses, on avoit la quantité $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm$, le solide en question seroit égal à la moitié de la somme des deux surfaces $ABLM$, $ablm$, multipliée par l'épaisseur Bb; car (154) la surface $ABLM$ est égale à $BC \times (\frac{1}{2}AB + CD + EF + GH + IK + \frac{1}{2}LM)$ et la surface $ablm$ est, par la même raison, égale à bc ou $BC \times (\frac{1}{2}ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2}lm)$, donc la moitié de la somme de ces deux surfaces multipliée par l'épaisseur Bb, seroit $\frac{Bb \times BC}{2} + (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; donc le solide en question ne diffère de ce produit, que de la quantité dont $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$ surpasse la quantité $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; or il est aisé de voir (*Arith.* 103) que cette différence est $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; donc le solide cherché est égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd +$

(252) que le solide $ABCDEFG$ est égal au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$ car le prisme tronqué $ABCEFG$ est égal (252) au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+AE+GC}{3}$; et par la même raison, le prisme tronqué $ADCEHG$ est égal au triangle EHG, ou (ce qui revient au même) au triangle EFG multiplié par $\frac{AE+GC+HD}{3}$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués, est égale au triangle EFG multiplié par $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$.

Soit maintenant un solide (*Fig.* 138) compris entre deux plans $ABLM$, $ablm$ parallèles, deux autres plans $ABba$, $MLlm$, parallèles entr'eux et perpendiculaires aux deux autres, un plan $BLlb$ perpendiculaire à ceux-là; et enfin la surface courbe $AHMmha$; et concevons ce solide coupé par des plans CD, Ef, Gh, etc. paralleles à $ABba$, également distants les uns des autres, et assez près pour qu'on puisse regarder AD, ad, DF, df, etc. comme des lignes droites : supposons enfin que les deux plans $ABLM$, $ablm$ sont assez près l'un de l'autre pour qu'on puisse regarder, sans erreur sensible, les sections Dd, Ff, Hh, etc. comme des lignes droites; il est visible que les solides partiels $ADdabBCc$, $DEfdcCEe$, etc. sont dans le cas du solide de la *Figure* 137. Donc la totalité de ces solides sera égale aux triangles bBC multiplié par $\frac{AB+2ab+2CD+cd}{3}+\frac{CD+2cd+2EF+ef}{3}+\frac{EF+2ef+2GH+gh}{3}+\frac{GH+2gh+2IK+ik}{3}+\frac{IK+2ik+2LM+lm}{3}$,

c'est-à-dire, en réunissant les quantités semblables, sera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$; et comme le triangle bBC est égal à $\frac{Bb \times BC}{2}$, le solide entier sera égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$.

Dans la vue de rendre cette expression plus simple, remarquons que si au lieu de $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parentheses, on avoit la quantité $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm$, le solide en question seroit égal à la moitié de la somme des deux surfaces $ABLM$, $ablm$, multipliée par l'épaisseur Bb; car (154) la surface $ABLM$ est égale à $BC \times (\frac{1}{2}AB + CD + EF + GH + IK + \frac{1}{2}LM)$ et la surface $ablm$ est, par la même raison, égale à bc ou $BC \times (\frac{1}{2}ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2}lm)$, donc la moitié de la somme de ces deux surfaces multipliée par l'épaisseur Bb, seroit $\frac{Bb \times BC}{2} + (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; donc le solide en question ne diffère de ce produit, que de la quantité dont $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$ surpasse la quantité $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; or il est aisé de voir (*Arith.* 103) que cette différence est $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; donc le solide cherché est égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd +$

$EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm) + \frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6} ab - \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} LM - \frac{1}{6} lm)$; or il est aisé de remarquer que $\frac{1}{6} ab - \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} LM - \frac{1}{6} lm$ est une quantité fort petite en comparaison de celle qui est entre les deux premieres parentheses, puisque les deux plans $ABLM$, $ablm$ étant supposés peu distants, la différence de AB à ab, et celle de LM à lm ne peuvent être que de fort petites quantités; on peut donc réduire la valeur de ce solide, à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm)$ c'est-à-dire à $Bb \times (\frac{ABLM + ablm}{2})$.

On peut donc dire que pour avoir la solidité d'une tranche de solide comprise entre deux surfaces planes paralleles, de telle figure qu'on voudra, et peu distantes l'une de l'autre, il faut multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces, par l'épaisseur de cette tranche.

255. Si l'épaisseur Bb de la tranche étoit trop considérable pour qu'on pût regarder Aa, Dd comme des lignes droites, il faudroit concevoir le solide partagé en plusieurs tranches d'égale épaisseur, par des plans paralleles à l'une des surfaces $ABLM$, $ablm$, et mesurant ces surfaces $ABLM$, $ablm$ et leurs paralleles, on auroit la solidité en ajoutant toutes les surfaces intermédiaires, et la moitié de la somme des deux extrêmes $ABLM$, $ablm$, et multipliant le tout par l'épaisseur d'une des tranches; c'est une suite immédiate de ce que nous venons de dire.

L'application de ceci, à la mesure de la partie de la carene, que la charge du navire fait plonger

dans la mer, est maintenant très-facile. On mesurera la surface des deux coupes horisontales faites à fleur d'eau, lorsque le navire est chargé, et lorsqu'il est vide. On ajoutera ces deux surfaces, et on multipliera la moitié de leur somme, par la distance de ces deux surfaces, c'est-à-dire, par l'épaisseur de la tranche qu'elles comprennent.

Si l'on vouloit avoir la solidité de la carene entiere, on feroit usage de ce qui vient d'être dit (255); mais il faudroit la considérer comme coupée en plusieurs tranches, non pas paralleles à la coupe faite à fleur d'eau, mais perpendiculaires à la longueur du navire.

Lorsqu'on mesure le volume de la partie de la carene que la charge fait plonger, on peut se contenter de mesurer la surface de la coupe prise à égale distance de deux coupes dont nous avons parlé ci-dessus, et la multiplier, comme ci-devant, par l'épaisseur de la tranche; car cette coupe moyenne différera toujours très-peu de la moitié de la somme des deux autres.

Parmi quelques-uns des objets que nous considérerons dans l'application de l'Algebre à la Géométrie, on trouvera des méthodes plus rigoureuses; néanmoins celles que nous venons d'exposer, seront toujours suffisantes, tant qu'on aura soin de mesurer les surfaces avec assez d'exactitude, et de multiplier les tranches lorsque l'épaisseur est considérable.

Nous verrons, dans la quatrieme Partie de ce Cours, que la charge du navire est égale au poids d'un volume d'eau égal au volume de la partie de la carene qu'elle fait plonger; lors donc qu'on a évalué ce volume en pieds-cubes, si l'on veut connoître la pesanteur de la charge, il n'y a qu'à multiplier le nombre des pieds-cubes par 72 ℔ qui est à

peu-près le poids d'un pied-cube d'eau de mer ; mais comme on évalue toujours cette charge en tonneaux, au lieu de multiplier par 72, pour diviser ensuite par 2000, ce qui seroit nécessaire pour réduire en tonneaux, on divisera seulement le nombre des pieds-cubes par 28, parce que 28 fois 72 faisant à-peu-près 2000, autant de fois il y aura 28 dans la solidité mesurée, autant il y aura de tonneaux.

Du Toisé des Solides.

256. Après ce que nous avons dit (155) sur le toisé des surfaces, il doit y avoir fort peu de choses à dire sur le toisé des solides.

Pour évaluer un solide, en toises-cubes, et en parties de la toise-cube, on peut s'y prendre de deux manières principales. La première est de compter par toises-cubes et par parties-cubes de la toise-cube ; c'est-à-dire, par toises-cubes, pieds-cubes, pouces-cubes, etc.

La *toise-cube* au *cubique* contient 216 pieds-cubes, parce que c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, et 6 pieds de haut.

Le *pied-cube* contient 1728 pouces-cubes, parce que c'est un cube qui a 12 pouces de long, sur 12 pouces de large, et 12 pouces de haut.

Par la même raison, on voit que le *pouce-cube* contient 1728 lignes cubes, et ainsi de suite.

257. Donc, pour évaluer un solide en toises-cubes et parties cubes de la toise-cube, il faudra réduire chacune de ses trois dimensions à la plus petite espèce, multiplier deux de ces dimensions ainsi réduites, l'une par l'autre, et le produit résultant, par la troisième ; et pour réduire en lignes cubes, pouces-cubes, pieds-cubes et toises-cubes,

(en supposant que la plus petite espèce ait été des points) on divisera successivement par 1728, 1728, 1728 et 216, ou seulement par 1728, 1728 et 216, si la plus petite espèce est seulement des lignes, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a un parallélipipede qui ait $2^T\ 4^P\ 8^p$ de long, $1^T|3^P$ de large, et $3^T\ 5^P\ 7^p$ de haut, on réduira ces trois dimensions à 200^P, 108^p, et 283^p qui étant multipliés, savoir 200 par 108, et le produit 21600^{pp} par 283^p, donneront 6112800 pouces-cubes, au 6112800^{ppp}; divisant donc par 1728, on aura 3537 pieds-cubes ou 3327^{PPP} et 864 de reste, c'est-à-dire, 864^{ppp}; divisant 3327^{ppp} par 216, on aura 16 toises-cubes ou 16^{TTT} et 81^{PPP}, en sorte que le parallélipipede en question, contient $16^{TTT}\ 81^{PPP}|\ 864^{ppp}$.

258. Dans la seconde maniere d'évaluer les solides, en toises-cubes et parties de la toise-cube, on se représente la toise-cube partagée en six parallélipipèdes, qui ont tous une toise quarrée de base, sur un pied de haut, et que pour cette raison on appelle *toise-toise-pieds*. On conçoit de même la toise-toise-pied, partagée en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toise quarrée de base et un pouce de haut, et qu'on appelle *toise-toise-pouces*; on subdivise de même chacune de celles-ci en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toise quarrée de base, sur une ligne de haut; et on continue de subdiviser en parallélipipèdes, qui ont constamment une toise quarrée de base, sur un point, une prime, une seconde, etc. de haut; en sorte que les subdivisions sont absolument analogues à celles de la toise linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toise quarrée; et les noms de ces différentes subdivisions, ne diffèrent de ceux qui sont relatifs

à la toise quarrée, qu'en ce que le mot *toise* y est énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette division de la toise-cube, sont absolument les mêmes que celles que nous avons enseignées, relativement à la toise quarrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entr'eux comme exprimant des toise-cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. et les deux autres comme marquant des nombres abstraits, dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipede que nous venons de calculer ci-dessus, et supposant que la longueur *AD* (*Fig.* 139) est de $2^T\ 4^P\ 8^P$, la largeur *AB* de $1^T\ 3^P$, et la hauteur *AL* de $3^T\ 5^P\ 7^P$; si l'on prend *AI* et *AE* chacun d'une toise, et qu'on se représente le parallélipipede *AIFEHGKD*, il est visible que ce parallélipipede est de $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTP}$, puisqu'il a une toise quarrée de base sur une longueur de $2^T\ 4^P\ 8^P$. Or pour avoir la solidité du parallélipipede total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipede partiel, d'abord autant de fois que sa largeur *AI* est contenue dans sa largeur *AB*, c'est-à-dire, une fois et demie, ou autant que le marque $1^T\ 3^P$; puis répéter ce produit autant de fois que la hauteur *AE* est contenue dans la hauteur *AL*, c'est-à-dire, autant de fois que le marque $3^T\ 5^P\ 7^P$, considéré comme nombre abstrait.

Mais pour se guider aisément dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise, tels qu'ils les ont; il suffit de savoir

que le produit doit être des toises-cubes, toises-toises-pieds, etc. Ainsi, en opérant comme au toisé des surfaces, on trouvera comme il suit :

2^{T}	4^{P}	8^{p}	
1^{T}	3^{P}		
2^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
3^{T}	5^{P}	7^{p}	
12^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTl}
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	2
16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}

259. Il est aisé de convertir ces parties de la toise, en parties-cubes; c'est-à-dire, pieds-cubes, pouces-cubes, etc. Il faut écrire sous les parties de la toise, à commencer des toises-toises-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, 3, $\frac{1}{4}$ consécutivement, et multiplier chaque nombre supérieur par son correspondant inférieur, porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, chacun au-dessous du premier de ces nombres, et lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il restera 1 ou 2 ou 3; on écrira sous le nombre 36

suivant, 432 ou 864 ou 1296, pour commencer une seconde colonne; appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner.

16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}	0^{TTPt}
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16^{TTT}	72^{PPP}.......			864^{opp}
	9			
16^{TTT}	81^{PPP}	864^{PPP}.		

On trouve le même produit que par la première méthode.

On multiplie les toises-toises-pieds par 36, parce que la toise-toise-pied ayant un pied de haut sur une toise quarrée ou 36 pieds quarrés de base, doit contenir 36 pieds-cubes. La toise-toise-pouce étant la douzième partie de la toise-toise-pied, doit contenir la douzième partie de 36 pieds-cubes; c'est-à-dire, 3 pieds-cubes; il faut donc multiplier par 3 les toise-toise-pouces; pareillement la toise-toise-ligne étant la douzième partie de la toise-toise-pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds-cubes ou un quart de pied-cube, ou (à cause que le pied-cube vaut 1728 pouces-cubes) elle doit contenir 432^{ppp}; en raisonnant de même, on voit que la toise-toise-point vaudroit 36^{ppp}, parce qu'elle est la douzième partie de la toise-toise-ligne, qui vaut 432^{ppp}, dont la douzième partie est 36; donc, etc.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties-cubes de la toise-cube, à des toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. il faudra diviser par 36, le nombre des pieds cubes, et l'on aura les toise-toise-pieds : on divisera le reste de cette division par 3, et l'on aura les toise-toise-pouces. On multipliera par 4 le reste de cette seconde division, et au produit on ajoutera 1 ou 2 ou 3 unités selon que le nombre des pouces-cubes sera entre 432 et 864, ou 864 et 1296, ou 1296 et 1728, et l'on aura les toise-toise-lignes; puis retranchant du nombre des pouces-cubes le nombre 432

432 ou 864, ou 1296, selon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera sur le reste, comme on a opéré sur les pieds-cubes, et l'on aura consécutivement les toise-toise-points, les toise-toise-primes, et les toise-toise-secondes; enfin on continuera de la même manière pour les lignes-cubes, etc.

Par exemple, si l'on demande de réduire en toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. le nombre 47^{TTT}, 52^{PPP}, 932^{ppp}; je divise 52 par 36, et j'ai 1^{TTP}, et un reste de 16; je divise celui-ci par 3, et j'ai 5^{TTp} et un reste de 1; je quadruple ce reste et j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces-cubes est entre 864 et 1296, et j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864 de 932, il reste 68; je le divise par 36, et j'ai 1^{TTpt}, et 32 de reste; je divise celui-ci par 3, et j'ai $10^{TT\prime}$, et 2 de reste; je quadruple ce reste, et j'ai $8^{TT\prime\prime}$, en sorte que j'ai, en total, 47^{TTT} 1^{TTP} 5^{TTp} 6^{TTl} 1^{TTpt} $10^{TT\prime}$ $8^{TT\prime\prime}$.

260. Puisque, pour avoir la solidité d'un prisme, il faut multiplier la surface de sa base, par sa hauteur: il s'ensuit, que si connoissant la solidité et la base, ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la base, il faut diviser la solidité par celui de ces deux facteurs que l'on connoîtra; mais il faut observer que dans l'exactitude, ce n'est point véritablement la solidité que l'on divise par la surface ou par la hauteur; mais c'est un solide que l'on divise par un solide; en effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit que lorsqu'on évalue un solide, on répète un autre solide de même base, autant de fois que la hauteur de celui-ci est contenue dans la hauteur du premier, ou bien on répète un solide de même hauteur, autant de fois que la surface de la base de celui-ci, est comprise dans la base de celui-là. Donc, quand on voudra, connoissant la solidité, et la surface de la base, par exemple,

connoître la hauteur ; il faudra chercher combien de fois la solidité proposée contient celle d'un solide de même base, et le quotient marquera par le nombre de ses unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela posé, si ayant, par exemple, un prisme dont la solidité soit de $16^{TTT}\,2^{TTP}\,3^{TTp}\,2^{TTl}$, et la surface de la base, de $12^{TT}\,0^{TP}\,0^{Tp}$, on veut savoir quelle est la hauteur ; on considérera le diviseur, non pas comme $12^{TT}\,0^{TP}\,0^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\,0^{TTP}\,0^{TTp}$, et alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\,2^{TTP}\,3^{TTp}\,3^{TTl}$ par $12^{TTT}\,0^{TTP}\,0^{TTp}$; mais comme la toise quarrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende et le diviseur marquoient des toises linéaires ; on aura donc simplement $16^{T}\,2^{P}\,3^{p}\,2^{l}$, à diviser par $12^{T}\,0^{P}\,0^{p}$, c'est-à-dire par 12^{T} ; et comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera donc selon la règle prescrite (*Arith.* 124 *et suiv.*).

Si la solidité et la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la surface de la base ; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}\,2^{TTP}\,3^{TTp}\,2^{TTl}$, et la hauteur de $2^{T}\,4^{P}\,8^{p}$; on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}\,4^{TTP}\,8^{TTp}$; et par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}\,2^{P}\,3^{p}\,2^{l}$; par $2^{T}\,4^{P}\,8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises quarrées, toise-pieds, etc. du reste il n'y aura aucune différence dans la manière de faire l'opération qui se fera toujours en vertu des règles données (*Arith.* 124 *et suiv.*) c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devoit exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie de la lettre *T*. Par exemple, dans le cas présent, on trouveroit pour quotient $6^{T}\,5^{P}\,4^{p}\,6^{l}$; on écrira donc $5^{TT}\,5^{TP}\,4^{Tp}\,6^{Tl}$.

Si la solidité étoit donnée en toises-cubes, et parties-cubes de la toise-cube, on la convertiroit en toises-cubes, toise-toise-pieds, etc. par ce qui a été dit (259), et l'opération seroit ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

261. Ce qu'on vient de dire du toisé en général, ne nous laisse que fort peu de chose à dire sur le toisé des bois.

Dans la marine, on mesure les bois en pieds-cubes et parties cubes du pied-cube ; ainsi il ne s'agit que de mesurer les dimensions en pieds et parties du pied, et les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite espece), on réduira en lignes-cubes, pouces-cubes, pieds-cubes, comme il a été dit ci-dessus, mais en s'arrêtant aux pieds-cubes.

Dans les bâtimens civils et les fortifications, l'usage est de réduire en solives.

Par *solive*, on entend un parallélipipède de deux toises de haut, sur 6 pouces d'équarrissage, ou 36 pouces quarrés de base; ce qui est équivalent à un parallélipipède d'une toise de haut sur $\frac{1}{2}$ pied quarré ou 72 pouces quarrés de base, et qui par conséquent contient 3 pieds-cubes.

On partage la solive en six parties, chacune d'un pied de haut et de 72 pouces quarrés de base, et chacune de ses parties s'appelle *pied de solive*.

On partage de même le pied de solive, en douze parties d'un pouce de haut et de 72 pouces quarrés de base chacune, qu'on appelle *pouces de solive*, et ainsi de suite.

Puisque la solive contient 3 pieds-cubes, ou la 72 partie d'une toise-cube, et que les subdivisions sont les mêmes que celles de la toise-cube en toise-toise pieds, etc. il s'ensuit que le nombre qui exprimeroit un solide quelconque, en solives et parties de solive, est 72 fois plus grand que celui

qui l'exprimeroit en toises-cubes ; toise-toise-pieds, etc.

Ainsi, pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises-cubes, toise-toise-pieds, etc. et multiplier ensuite le produit par 72 ; mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande ; c'est-à-dire, regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, et ainsi de suite. Regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds ; alors multipliant ces deux nouvelles dimensions entr'elles, et le produit par la troisième, on aura tout de suite la solidité en solives, pieds de solive, etc. Par exemple, si l'on a une piece de bois de 8^{T} 5^{P} 6^{p} de long, sur 1^{P} 7^{p} de large, et 1^{P} 5^{p} d'épaisseur ; au lieu de 1^{P} 7^{p}, je prends 3^{T} 1^{p}, c'est-à-dire, douze fois plus ; et au lieu de 1^{p} 5^{p}, je prends 1^{T} 2^{P} 6^{p}, c'est-à-dire, six fois plus ; et multipliant 8^{T} 5^{P} 6^{p}, par 3^{T} 1^{p} ; puis le produit, par 1^{T} 2^{P} 6^{p}, je trouve 40^{TTT} 0^{TTP} 0^{TTp} 1^{TTl} qu'il faut compter pour $40^{sol.}$ 0^{P} 0^{p} 1^{l} dont les pieds, pouces, etc. sont des pieds, pouces, etc. de solive.

1_{T}	2^{P}	6_{p}
3_{T}	1^{P}	
4	1	6
0	1	5
4^{TT}	2^{TP}	11^{TP}

Des Rapports des Solides en général.

262. *Comparer deux Solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une cer-

taine espece, contenues dans l'un de ces solides, contient le nombre de mesures, de même espèce contenues dans l'autre.

263. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre, sont entr'eux comme les produits de leur base par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base.

Donc *les prismes ou les cylindres ou les prismes et les cylindres de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases, et les prismes et les cylindres de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs;* car le rapport des produits des bases par les hauteurs, ne change point lorsqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve lorsque la base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide et un cône, sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales;* car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur (240).

264. *Les solidités des pyramides semblables, sont entr'elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides telles que IABCDF, *Iabcdf* (*fig.* 115) puisque ces deux pyramides sont composées d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont, en général, comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures

semblables, étant entr'elles comme les quarrés des hauteurs IP, *Ip* (202), les deux pyramides seront entr'elles comme les produits des quarrés des hauteurs, par les hauteurs même ; car on pourra (99) substituer au rapport des bases, celui des quarrés des hauteurs. Et puisque (213) les hauteurs sont proportionnelles à toutes les autres dimensions homologues, leurs cubes seront donc aussi proportionnels aux cubes de ces dimensions homologues (*Arith.* 191) ; donc en général deux pyramides semblables sont entr'elles comme les cubes de leurs dimensions homologues.

265. Donc *en général les solidités de deux corps semblables, sont entr'elles comme les cubes des lignes homologues de ces solides.* Car les solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune ; et comme deux quelconques de ces pyramides semblables seront entr'elles en même rapport, puisqu'elles sont entr'elles comme les cubes de leurs dimensions homologues, lesquelles sont en même rapport que deux autres dimensions homologues quelconques; il s'ensuit que la somme des pyramides du premier solide, sera à la somme des pyramides du second, aussi dans le même rapport des cubes des dimensions homologues.

Donc *les solidités des sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Donc, en se rappellant tout ce qui a précédé, on voit 1.° que les contours des figures semblables, sont dans le rapport simple des lignes homologues. 2.° Que les surfaces des figures semblables, sont entr'elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues. 3.° Que les soli-

dités des corps semblables, sont entr'elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainsi, si deux corps semblables, deux sphères, par exemple, avoient leurs diamètres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles seroient aussi dans le rapport de 1 à 3; les surfaces de ces sphères seroient comme 1 à 9, et les solidités comme 1 à 27; c'est-à-dire, que la circonférence d'un des grands cercles de la seconde vaudroit trois fois celle d'un des grands cercles de la première; la surface de la seconde vaudroit neuf fois celle de la première : et enfin la seconde sphère vaudroit 27 sphères telles que la première.

Donc pour faire un solide semblable à un autre et dont la solidité soit à celle de celui-ci, dans un rapport donné, par exemple, dans celui de 2 à 3, il faut lui donner des dimensions telles, que le cube de l'une quelconque de ces dimensions soit au cube d'une dimension homologue du solide auquel il doit être semblable, comme 2 est à 3. Par exemple, si l'on a une sphere qui ait 8 pouces de diametre, et qu'on demande quel doit être le diametre d'une sphere qui en seroit les $\frac{2}{3}$, il faudra chercher le quatrieme terme de cette proportion $1 : \frac{2}{3}$ 3 : 2 : : le cube de 8, c'est-à-dire : : 512 est à un quatrieme terme. Ce quatrieme terme qui est $341\frac{1}{3}$, sera le cube du diametre cherché; c'est pourquoi tirant la racine cubique (*Arith.* 159) on aura 6^{p}, 99 pour ce diametre; c'est-à-dire, 7^{p} à très-peu-près; ce qu'on peut vérifier aisément en cette maniere. Cherchons quelles sont les solidités de deux spheres, l'une de 8 pouces, l'autre de 7 pouces de diametre. La circonférence de leur grand cercle se trouvera par ces deux proportions. (152)

7 : 22 : : 8 :

7 : 22 : : 7 :

les quatriemes termes sont $25\frac{1}{7}$ et 22, multipliant ces circonférences, chacune par son diametre, on aura (222) les surfaces de ces spheres, lesquelles seront par conséquent $201\frac{1}{7}$ et 154; enfin multipliant ces surfaces par le $\frac{1}{3}$ de leur rayon, c'est-à-dire, respectivement par le sixieme de 8 ou de 7, on aura, pour les solidités $268\frac{4}{21}$ et $179\frac{2}{3}$, dont le rapport est le même que celui de $\frac{5632}{21}:\frac{539}{3}$, en réduisant en fractions, ou (en multipliant les deux termes de la derniere fraction par 7, et supprimant le dénominateur commun) le même que de 5632 à 3773; or (*Arith.* 167) le rapport de ces deux quantités est $1\frac{1859}{3773}$, c'est-à-dire, en réduisant en décimales 1, 49; et le rapport de 3 à 2 est 1, 5 ou 1, 50 (*Arith.* 30); la différence n'est donc que de $\frac{1}{100}$; cette différence vient de ce que le diametre n'est calculé qu'à peu près; d'ailleurs le rapport de 7 à 22 n'est pas exactement celui du diametre à la circonférence.

Dans les corps composés de la même matiere, les poids sont proportionnels à la quantité de matiere, ou à la solidité; ainsi connoissant le poids d'un boulet d'un diametre connu, pour trouver celui d'un boulet d'un autre diametre et de la même matiere, il faut faire cette proportion : Le cube du diametre du boulet dont le poids est connu, est au cube du diametre du second, comme le poids du premier est à un quatrieme terme qui sera le poids du second.

Nous avons vu (162) que dans deux vaisseaux parfaitement semblables, les voilures seroient comme les quarrés des hauteurs des mâts, et par conséquent, avons-nous dit, comme les quarrés des longueurs des Navires, parce que toutes les dimensions homologues des solides semblables

sont en même rapport. Or on voit ici que les poids des solides semblables et de même matiere, sont comme les cubes des dimensions homologues; on voit donc que si deux navires semblables étoient mâtés proportionnellement, les quantités de vent qu'ils pourroient recevoir, seroient comme les quarrés de leur longueur, tandis que les poids seroient comme les cubes; et comme la raison des quarrés n'est pas la même, et est plus petite que celle des cubes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, cette seule considération fait voir que la voilure qui seroit propre pour un certain navire, ne le seroit pas pour un navire plus petit, si l'on diminuoit proportionnellement les deux dimensions de cette voilure. Il y a encore d'autres considérations à faire entrer dans l'examen de cette question, qui appartient proprement à la Méchanique. Nous ne nous proposons ici que de préparer les esprits à prévoir les usages qu'on peut faire des principes établis jusqu'ici, pour la discussion de ces sortes de questions.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. LE MOT *Trigonométrie* signifie mesure des triangles. Mais on comprend généralement sous ce nom, l'art de déterminer les positions et les dimensions des différentes parties de l'étendue, par la connoissance de quelques - unes de ces parties.

Si l'on conçoit que les différents points qu'on se représente dans un espace quelconque, soient joints les uns aux autres par des lignes droites, il se présente trois choses à considérer : 1°. la longueur de ces lignes; 2°. les angles qu'elles forment entr'elles; 3°. les angles que forment entr'eux, les plans dans lesquels ces lignes sont ou peuvent être imaginées comprises. C'est de la comparaison de ces trois objets que dépend la solution de toutes les questions qu'on peut proposer sur la mesure de l'étendue et de ses parties; et l'art de déterminer toutes ces choses, par la connoissance de quelques-unes d'entr'elles, se réduit à la résolution de ces deux questions générales.

1°. Connoissant trois des six choses (angles et côtés) qui entrent dans un triangle rectiligne, trouver les trois autres lorsque cela est possible.

2°. Connoissant trois des six choses qui composent un triangle sphérique, (c'est-à-dire, un triangle formé sur la surface d'une sphere, par trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre, le centre de cette même sphere) trouver les trois autres, lorsque cela est possible.

La premiere question, est l'objet de la Trigonometrie qu'on nomme *Trigonométrie plane*, parce que les six choses qu'on y considere sont dans un même plan : on la nomme aussi *Trigonométrie rectiligne.*

La seconde question appartient à la *Trigonométrie sphérique.* Les six choses qu'on y considere, sont dans des plans différens, comme nous le verrons par la suite.

De la Trigonométrie plane, ou rectiligne.

267. La *Trigonométrie plane* est une partie de la Géométrie, qui enseigne à déterminer ou à calculer trois des six parties d'un triangle rectiligne, par la connoissance des trois autres parties, lorsque cela est possible.

Je dis, lorsque cela est possible, parce que si l'on ne connoissoit que les trois angles, par exemple, on ne pourroit pas déterminer les côtés. En effet, si par un point P, pris à volonté sur le côté AB du triangle ABC (*fig.* 140), dont je suppose qu'on connoisse les trois angles, on mène DE parallèle à BC, on aura un autre triangle ADE qui aura les mêmes angles que le triangle ABC (39); et on voit qu'on en peut former ainsi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudroit donc que le calcul donnât tout à la fois une infinité de côtés différens.

La question est donc alors absolument indéterminée. Nous verrons, cependant, que si l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut, du moins, déterminer leur rapport.

Mais lorsque parmi les trois choses connues ou données, il entrera un côté, on peut toujours

déterminer tout le reste. Il y a cependant un cas où il reste quelque chose d'indéterminé : le voici.

Supposé que dans le triangle *ABC* (*fig.* 141) on connoisse les deux côtés *AB* et *BC*, et l'angle A opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle C ni celle du côté *AC*, qu'autant qu'on saura si cet angle C est aigu ou obtus ; en effet, si l'on conçoit que du point *B* comme centre et d'un rayon égal au côté *BC*, on ait décrit un arc *CD*, et que du point *D* où cet arc rencontre *AC*, on ait tiré *BD*, on aura un nouveau triangle *ABD*, dans lequel on connoîtra les mêmes choses qu'on connoît dans le triangle *ABC* ; savoir, l'angle *A*, le côté *AB*, et le côté *BD* égal à BC ; on a donc ici les mêmes choses pour déterminer l'angle *BDA*, qu'on avoit dans le triangle *ABC* pour déterminer l'angle C.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci et le précédent, qu'on peut ici assigner la valeur de l'angle C et de l'angle *BDA*, comme nous le verrons ci-après : la seule chose qui soit indéterminée, c'est de savoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, et par conséquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choses données, savoir encore si l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reste on peut remarquer en passant, que les deux angles C et *BDA* dont il s'agit, sont supplément l'un de l'autre ; car *BDA* est supplément de *BDC* qui est égal à l'angle C, parce que le triangle *BDC* est isoscèle.

268. Ce ne sont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles : on substitue aux angles, des lignes qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter ces angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer

dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés des triangles; il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connoître ces lignes, et de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes.

269. La perpendiculaire *AP* (*fig.* 142) abaissée de l'extrémité d'un arc *AB* sur le rayon *BC* qui passe par l'autre extrémité *B* de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La partie *BP* du rayon, comprise entre le sinus et l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*.

La partie *BD* de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon *BC* et le rayon *CA* prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La ligne *CD*, qui n'est autre chose que le rayon *CA* prolongé jusqu'à la tangente, s'appelle *sécante* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

Si l'on mène le rayon *CF* perpendiculaire à *CB*, et à son extrémité *E* la perpendiculaire *FE* qui rencontre en *F* le rayon *CA* prolongé, et qu'enfin on mène *AQ* perpendiculaire sur *CF*, il suit des définitions précédentes, que *AQ* sera le sinus, *FQ* le sinus-verse, *FE* la tangente, et *CF* la sécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*.

Mais comme l'angle *ACF* est complément de *ACB*, puisque ces deux angles font ensemble un angle droit, on peut dire que *AQ* est le sinus du complément; *FQ*, le sinus-verse du complément; *FE*, la tangente du complément; et *CE*, la sécante du complément de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*.

Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *cosinus*, au lieu de sinus du complément; *cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément ; et *cosécante*, au lieu de sécante du complément. En sorte que les lignes *AQ*, *FQ*, *FE*, *CE*, seront dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*; de même les lignes *AP*, *BP*, *BD* et *CD*, pourront être dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*; car *AB* est complément de *AF*, comme *AF* l'est de *AB*.

Pour désigner ces lignes, lorsqu'il sera question d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui servent à nommer cet angle ou cet arc, les expressions abrégées, sin. cos. tang. cot. ainsi sin. *AB*, signifiera le sinus de l'arc *AB*; sin. *ACB*, signifiera le sinus de l'angle *ACB*; de même cos. *AB* cos. *ACB*, signifieront le cosinus de l'arc *AB*, le cosinus de l'angle *ACB*; et pour désigner le rayon, nous prendrons la lettre R.

270. Il est évident, 1.° que *le cosinus* AQ *d'un arc quelconque* AB, *est égal à la partie* CP *du rayon, comprise entre le centre et le sinus.*

2.° Que *le sinus-verse* BP *est égal à la différence entre le rayon et le cosinus.*

3.° Que *le sinus d'un arc quelconque* AB, *est la moitié de la corde* AG *d'un arc double* ABG. Car le rayon C*B* étant perpendiculaire sur la corde *AG*, divise cette corde et son arc en deux parties égales (52).

271. De cette dernière proposition, il suit que *le sinus de* 30 *degrés*, *vaut la moitié du rayon*;

car il doit être la moitié de la corde de 60 degrés, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

272. *La tangente de 45 degrés est égale au rayon.* Car si l'angle *ACB* est de 45 degrés, comme l'angle *CBD* est droit, l'angle *CDB* vaudra aussi 45 degrés; le triangle *CBD* sera donc son isoscèle, et par conséquent *BD* sera égal à *CB*.

273. A mesure que l'arc *AB* ou l'angle *ACB* augmente, son sinus *AP* augmente, et son cosinus *AQ* ou *CP* diminue, jusqu'à ce que l'arc *AB* soit devenu de 90 degrés; alors le sinus *AP* devient *FC*, c'est-à-dire, égal au rayon, et le cosinus est zéro, parce que le point *A* tombant en *F*, la perpendiculaire *AQ* devient zéro.

A l'égard de la tangente *BD*, et de la cotangente *FE*, il est visible que la tangente *BD* augmente continuellement, et que la cotangente, au contraire, diminue; mais, l'une et l'autre, de manière que quand l'arc *AB* est devenu de 90 degrés, sa tangente est infinie, et sa cotangente est zéro : en effet, plus l'arc *AB* devient grand, plus le point *D* s'élève au-dessus de *BC*, et quand le point *A* est infiniment près de *F*, les deux lignes *CD* et *BD* sont presque parallèles, et ne se rencontrent plus qu'à une distance infinie; donc *BD* est alors infinie; donc elle l'est quand le point *A* tombe sur le point *F*.

274. Ainsi *pour l'arc de 90 degrés, le sinus est égal au rayon, le cosinus est zéro, la tangente est infinie, et la cotangente est zéro.*

Comme le sinus de 90 degrés est le plus grand de tous les sinus, on l'appelle, pour le distinguer

des autres, *sinus total;* en sorte que ces trois expressions, le *sinus de* 90 *degrés*, le *rayon*, le *sinus total*, signifient la même chose.

275. Lorsque l'arc *AB* passe 90^d (*fig.*143) son sinus *AP* diminue, et son cosinus *AQ* ou *CP* qui tombe alors au-delà du centre par rapport au point B, augmente jusqu'à ce que l'arc AB soit devenu de 180 degrés, auquel cas le sinus est zéro, et le cosinus est égal au rayon. On voit aussi que le sinus AP, et le cosinus CP de l'arc AB, ou de l'angle ACB plus grand que 90 degrés, appartiennent en même temps à l'arc AH ou à l'angle ACH moindre que 90 degrés et supplément de celui-là; de sorte que, *pour avoir le sinus et le cosinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus et le cosinus de son supplément.* Mais il faut bien remarquer que le cosinus tombe du côté opposé à celui où il tomberoit, si l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés.

A l'égard de la tangente, comme elle est déterminée (269) par la rencontre de la perpendiculaire BD (*fig.* 142) avec le rayon CA prolongé, il est visible que lorsque l'arc AB (*fig.* 143) est de plus de 90 degrés, elle est alors BD; mais en élevant la perpendiculaire HI, il est aisé de voir que le triangle CBD est égal au triangle CHI, et que par conséquent BD est égal à HI.

276. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que 90 degrés, est la même que celle du supplément de cet arc;* toute la différence qu'il y a, c'est qu'elle tombe au-dessous du rayon BC. Pour la cotangente EF, elle est aussi la même que la cotangente du supplément; et elle tombe aussi du côté opposé à celui où elle tomberoit, si l'arc AB

AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés. On voit encore, et par la même raison que ci-dessus, que pour 180 degrés, la tangente est zéro, et la cotangente infinie.

277. Ces notions supposées, concevons que le quart de circonférence *BF* (*fig.* 142) soit divisé en arcs de 1′, c'est-à-dire, en 5400 parties égales, et que de chaque point de division, on abaisse des perpendiculaires ou sinus tel que *AP*, sur le rayon *BC*; concevons aussi ce rayon *BC* divisé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000, par exemple; chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon : si donc, par quelque moyen que ce soit, on pouvoit parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il est visible que ces lignes pourroient être employées pour fixer la grandeur des angles; en sorte que si ayant écrit par ordre, dans une colonne, toutes les minutes depuis zéro jusqu'à 90 degrés, on écrivoit dans une colonne à côté et vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correspondante, on pourroit, par le moyen de cette table, assigner quel est le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus, seroit connu; et réciproquement, connoissant le nombre des degrés et parties de degrés de l'angle, on pourroit assigner le nombre des parties de son sinus. Cette Table auroit cette utilité, non-seulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon auroit le même nombre de parties qu'on en auroit supposé à celui d'après lequel on a construit la table, mais encore pour tout autre, dont le rayon seroit connu; par exemple, supposons un angle *DCG* (*fig.* 144) dont le côté ou rayon *CD*

soit de 8 pieds, et la perpendiculaire DE, de 3 pieds; et imaginons que *CA* soit le rayon sur lequel on a calculé les tables; si l'on imagine l'arc *AB* et la perpendiculaire *AP*, cette perpendiculaire sera le sinus des tables; or je puis trouver aisément de combien de parties est cette perpendiculaire; car comme les triangles *CDE*, *CAP* sont semblables (à cause des parallèles *DE* et *AP*), j'aurai (109) *CD* : *DE* : : *CA* : *AP*, c'est-à-dire, 8p : 3p : : 100000 : *AP*; je trouverai donc (*Arith.* 179) que *AP* vaut 37500; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la table parmi les sinus, et je trouverai à côté, le nombre des degrés et minutes de l'angle *DCG* ou *DCE*.

Réciproquement si l'on donnoit le nombre des degrés et minutes de l'angle *DCG* et son rayon *CD*, on détermineroit de même la valeur de la perpendiculaire *DE*; car sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouveroit dans la table, quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus *AP* qui répond à ce nombre de degrés; et alors, en vertu des triangles semblables *CAP*, *CDE*, on auroit cette proportion *CA* : *AP* : : *CD* : *DE*, par laquelle il seroit facile de calculer *DE*, puisque les trois premiers termes *CA*, *AP* et *CD* sont connus, savoir *CA* et *AP* par les tables, et *CD* est donné en pieds.

On voit par là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (268) pouvoir être substituées aux angles, dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

278. Mais les sinus ne sont pas les seules lignes qu'on emploie : on fait usage aussi des tangentes et même des sécantes. Ces lignes sont faciles à cal-

culer quand une fois on a calculé tous les sinus ; car comme le triangle *CPA* et le triangle *CBD* (*fig.* 142) sont semblables, on en peut tirer ces deux proportions :

CP : PA : : CB : BD
et CP : CA : : CB : CD,

c'est-à-dire (en faisant attention que CP est égal à AQ)

cos. AB : sin. AB : : R : tang. AB.
et cos. AB : R : : R : séc. AB.

Or on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes sont connus, lorsqu'on connoît tous les sinus ; puisque le cosinus d'un arc n'est autre chose que le sinus du complément de cet arc : il sera donc aisé d'en conclure (*Arith.* 179) la valeur du quatrième terme de chacune, et par conséquent des tangentes et des sécantes, et par conséquent aussi des cotangentes et des cosécantes, qui ne sont autre chose que des tangentes et des sécantes de complément.

279. Au reste, les deux dernieres proportions que nous venons d'établir ne sont pas seulement utiles pour le calcul des tangentes et des sécantes; elles sont encore d'un grand usage dans beaucoup de rencontres, comme nous le verrons dans la suite de ce Cours : il faut donc s'appliquer à les retenir ; la seconde, par exemple, peut nous fournir encore une propriété, qui est le fondement de la construction des cartes réduites, comme nous le verrons par la suite : voici cette propriété. De même que nous venons de démontrer que *cos.* AB : R : : R : *sec.* AB on démontrera aussi pour un autre arc quelconque BO, que *cos.* BO :

R : : R : *sec.* BO; or ces deux proportions ayant les mêmes termes moyens, doivent avoir les produits de leurs extrêmes, égaux (*Arith.* 178); donc on peut (*Arith.* 180) former des extrêmes de l'une et de l'autre, une nouvelle proportion, qui aura pour extrêmes les extrêmes de l'une, et pour moyens les extrêmes de l'autre, en sorte qu'on aura *cos.* AB : *cos.* BO : : *séc.* BO : *séc.* AB; d'où l'on conclura que les cosinus de deux arcs sont en raison réciproque ou inverse de leurs sécantes.

280. Voici encore une autre proportion utile dans plusieurs cas, et d'où l'on déduira de la même maniere, que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes : les triangles CBD, CFE sont semblables, parce que outre l'angle droit en B et en F, on a de plus l'angle DCB égal à l'angle CEF, à cause des paralleles CB, EF; on aura donc BD : CB : : CF : FE, c'est-à-dire, *tang.* AB : R : : R : *cot.* AB : on prouveroit donc de même, que *tang.* BO : R : : R : *cot.* BO, et par conséquent *tang.* AB : *tang.* BO : : *cot.* BO : *cot.* AB.

Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être question, sont ce qu'on appelle des *Tables de Sinus*; elles renferment ordinairement, non-seulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie aussi souvent qu'on le peut, à la place des valeurs numériques; ces mêmes tables renferment aussi les logarithmes des nombres naturels; telles sont celles que nous avons indiquées dans l'Arithmétique, page 234*.

* Nous en avons donné dans le Traité de Navigation qui fait le sixieme Volume de ce Cours.

Avant que d'exposer les usages de ces Tables, pour la résolution des triangles, il ne nous reste plus qu'à parler de leur formation, c'est-à-dire, de la méthode par laquelle on a calculé ou pu calculer les sinus, etc. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers, que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet, nous serviront ailleurs.

281. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le quarré du sinus, du quarré du rayon, et tirer la racine quarrée du reste.* Car le cosinus AQ (*fig.* 142) est égal à PC qui est côté de l'angle droit dans le triangle rectangle APC, dont on connoît alors l'hypothénuse CA et le côté AP (166).

Ainsi si l'on demandoit le cosinus de 30 degrés; comme nous avons vu (271) que le sinus de 30 degrés est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100000 parties, ce sinus seroit 50000; retranchant son quarré, 2500000000 du quarré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine quarrée 86603 est le cosinus de 30 degrés, ou le sinus de 60 degrés.

282. *Connoissant le sinus d'un arc AB* (fig. 145) *pour avoir celui de sa moitié*, il faut d'abord calculer le cosinus de ce premier arc; ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus-verse *BP* : on quarrera la valeur de *BP*, et on ajoutera ce quarré avec celui du sinus *AP*; la somme (166) sera le quarré de la corde *AB*; tirant la racine quarrée de cette somme, on aura *AB*, dont la moitié est le sinus *BI* de l'arc *BD* moitié de *ADB* (270).

283. *Connoissant le sinus BI d'un arc BD* (*fig.* 145) *pour trouver le sinus AP du double ADB,*

de cet arc, on calculera le cosinus CI de BD, et on fera cette proportion, $R : \cos. BD :: 2 \sin. BD : \sin. ADB$, dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, et dont il sera facile de calculer le quatrième.

Cette proportion est fondée sur ce que les deux triangles CBI et BAP sont semblables ; parce qu'outre l'angle droit en P et en I, ils ont d'ailleurs l'angle B commun ; ainsi on a $CB : CI :: AB : AP$. Or CI (270) est le cosinus de BD, et AB le double de BI sinus de BD; AP est le sinus de ADB ; et CB est le rayon; donc $R : \cos. BD :: 2 \sin. DB : \sin. ADB$.

284. *Connoissant les sinus des deux arcs* AB, AC (fig. 146), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence*, il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, et le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs ; et la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc AD égal à l'arc AC, tirez la corde CD, le rayon LA qui divisera cette corde en deux parties égales au point I; des points C, A, I et D, abaissez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF, sur BL; enfin des points I et D menez IM et DN, parallèles à BL. Puisque CD est divisée en deux parties égales en I, CN sera aussi divisée en deux parties égales en M (102).

Cela posé, CK qui est le sinus de BC somme des deux arcs, est composé de KM et de MC, ou de IH et de MC. DF qui est le sinus de BD

différence des deux arcs, est égal à KN qui vaut KM moins MN, c'est-à-dire IH moins CM; ainsi pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH; et au contraire l'en retrancher, pour avoir le sinus de la différence.

Or les triangles semblables LAG, LIH donnent $LA : LI :: AG : IH$, c'est-à-dire, $R : \cos. AC :: \sin. AB : IH$; donc (*Arith.* 179) IH vaut $\frac{\sin. AB \times \cos. AC}{R}$

Les triangles LAG et CIM semblables parce qu'en vertu de la construction qu'on a faite, ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent (112) $LA : LG :: CI : MC$, ou $R : \cos. AB :: \sin. AC : MC$; donc MC vaut $\frac{\sin. AC \times \cos. AB}{R}$ donc il faut ajouter $\frac{\sin. AC \times \cos. AB}{R}$ avec $\frac{\sin. AB \times \cos. AC}{R}$ pour avoir le sinus de la somme, et l'en retrancher au contraire, pour avoir le sinus de la différence.

285. *Pour avoir le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs dont on connoît les sinus*, il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cosinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux sinus; alors retranchant le second produit du premier, et divisant le reste par le rayon, on aura le cosinus de la somme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, et on en divisera la somme, par le rayon. Car puisque DC est coupée en deux parties égales en I, FK sera coupée en deux parties égales en H; or LK qui est le cosinus de la somme: vaut LH moins HK, ou LH moins IM; et LF qui est le cosinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK,

ou enfin LH plus IM : voyons donc quelles sont les valeurs de LH et de IM.

Les triangles semblables LGA, LHI donnent LA : LI : LG : LH.

C'est-à-dire, R : cos. AC : : cos. AB : LH ;

Donc LH vaut $\frac{\cos. AC \times \cos. AB.}{R}$

Les triangles semblables LAG, CIM donnent LA : AG : : CI : IM,

C'est-à-dire, R. sin. AB : : sin. AC : IM ;

Donc IM vaut $\frac{\sin. AB \times \sin. AC.}{R}$

Il faut donc, pour avoir le cosinus de la somme, retrancher $\frac{\sin. AB \times \sin. AC}{R}$ de $\frac{\cos. AB \times \cos. AC}{R}$; et au contraire, l'ajouter pour avoir le cosinus de la différence.

286. *La somme des sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 147) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs, est à la tangente de la moitié de leur différence*, c'est-à-dire, que *sin.* AB + *sin.* AC : *sin.* AB — *sin.* AC : : *tang.* $\frac{AB+AC}{2}$: *tang.* $\frac{AB-AC.}{2}$

Après avoir tiré le diamètre AM, portez l'arc AB de A en D ; tirez la corde BD qui sera perpendiculaire sur AM. Par le point C, tirez CP, perpendiculaire, et CF parallèle à AM. Du point F, menez les cordes FB et FD, et d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G ; et en ce point G, élevez HL perpendiculaire à CF, les lignes GH et GL sont les tangentes des angles GFH et GFL, ou CFB et CFD qui ayant leurs sommets à la circonférence, ont pour mesure la moitié des arcs CB, CD sur lesquels ils s'appuient (63), c'est-à-

dire, la moitié de la différence BC, et la moitié de la somme CD des deux arcs AB, AC; ainsi GL et GH sont les tangentes de la moitié de la somme, et de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela posé, il est visible que DS étant égal à BS, la ligne DE vaut BS + SE ou BS + CP, c'est-à-dire, la somme des sinus des arcs AB, AC; pareillement BE vaut BS — SE ou BS — CP, c'est-à-dire, la différence des sinus de ces mêmes arcs. Or, à cause des parallèles BD, HL, on a (115) DE : BE :: GL : GH.

Donc $\sin. AB + \sin. AC : \sin. AB - \sin. AC :: \text{tang.} \frac{AB + AC}{2} : \text{tang.} \frac{AB - AC}{2}$

287. Donc *la somme des cosinus de deux arcs, est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car les cosinus n'étant autre chose que des cosinus de complément, il suit de la proposition précédente, que la somme des cosinus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des complémens, est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes complémens : or, la moitié de la somme des complémens de deux arcs est le complément de la moitié de la somme de ces deux arcs ; et la demi-différence des complémens est la même que la demi-différence des arcs ; donc, etc.

288. Les trois principes posés (271, 282 et 284) suffisent pour concevoir comment on pourroit s'y prendre pour former une Table des sinus.

En effet, on connoît le sinus de 30d par ce qui a été dit (271); et par ce qui a été dit (282), on peut trouver celui de 15d, et successivement ceux de 7d 30′, 3d 45′, 1d 52′ 30″, 0d 56′ 15″, 0d 28′ 7″ 3‴, 0d 14′ 3″ 45‴, 0d 7′ 1″ 52‴ 30iv.

Cela posé, on remarquera que quand les arcs sont fort petits, ils ne diffèrent pas sensiblement de leurs sinus, et sont par conséquent à très-peu-près proportionnels à ces sinus; ainsi pour trouver le sinus de 1′, on fera cette proportion, *l'arc de* 0 7′ 1″ 52‴ 30iv, *est à l'arc de* 0d 1′, *comme le sinus de ce premier arc est au sinus de* 1′.

Si dans ce calcul on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois décimales, pour être en droit d'en conclure les suivans, à moins d'une unité près; alors on remontera facilement aux autres en cette maniere.

Depuis 1′ jusqu'à 3d 0′, il suffira de multiplier le sinus de 1′ successivement par 2, 3, 4, 5, etc. pour avoir le sinus de 2′, 3′, etc. jusqu'à 3d, à moins d'une unité près.

Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de 3d 0′, on fera usage de ce qui a été dit (284); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant les sinus, par ce principe, que de degrés en degrés seulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y satisfera en prenant la différence des sinus de deux degrés consécutifs, et formant cette proportion, *soixante minutes sont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des sinus des deux degrés voisins est à un quatrième terme*, qui sera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux sinus, pour avoir le sinus du nombre de degrés et minutes dont il s'agit. Par exemple, si après avoir trouvé que les sinus de 8d et de 9d, sont 13917 et 15643, je voulois avoir le sinus de 8d 17′, je prendrois la différence 1726 de ces sinus, et je calculerois le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 60′ : 17′ : : 1726 :

Ce quatrième terme, qui est 489, à très-peu près, étant ajouté à 13917 donne 14406 pour le sinus de 8d 17′, tel qu'il est dans les tables, à moins d'une unité près.

La raison de cette proportion est fondée sur ce que, lorsque l'arc KL (*fig.* 129) est petit, comme de 1d, par exemple, les différences LM, Iu des sinus LF, IH, sont à peu près proportionnelles aux différences KL, KI des arcs correspondans AL, AI, parce que les triangles KML,

KuI pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

289. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87d. Passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre iu (*fig.* 148) pour la différence des sinus PB, Qx, parce que la quantité ux, toute petite qu'elle est, a un rapport sensible avec iu, et d'autant plus sensible que l'arc AB approche plus de 90d. Dans ce cas il faut se rappeller que (173) les lignes DE, Dr qui sont les différences entre le rayon et les sinus PB, Qx sont proportionnelles aux quarrés des cordes D B et D x, ou (à cause que les arcs DB et D x sont fort petits) aux quarrés des arcs DB et Dx; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87d, on prendra sa différence avec le rayon 100000, et pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87d et 90d, on fera cette proportion; le quarré de 3d ou de 180′, est au quarré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87d, est à un quatrième terme, qui sera Dr, et qui étant retranché du rayon, donnera Cr ou Qx sinus de l'arc en question.

Par exemple, ayant trouvé que le sinus de 87d est 99863, si je veux avoir le sinus de 88d 24′, dont le complément est 1d 36′ ou 96′, je ferai cette proportion, $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 :$ Dr, par laquelle je trouve que Dr vaut 39, à très-peu de chose près; retranchant 39 du rayon 100000, j'ai 99961 pour le sinus de 88d 24′, tel qu'il est en effet dans les Tables.

290. Ayant calculé ainsi les sinus, on aura facilement les tangentes et les sécantes, par ce qui a été dit (178).

291. Les sinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes, comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenoit dans les Tables la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (*Arith.* 239), on ne trouveroit pas ce logarithme absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus; la raison en est que les sinus des tables ont été calculés originairement, dans la supposition que le rayon étoit de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle précision, on a supprimé dans les Tables actuelles les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc. en sorte que ces valeurs, telles qu'elles sont

degrés et minutes de l'arc qui, dans la Table, est immédiatement au-dessous de celui que l'on cherche.

On pourra suivre cette règle, tant que l'arc ne sera pas au-dessous de 3 degrés; lorsqu'il sera au-dessous, on se conduira comme dans cet exemple; supposons qu'on demande le sinus de 1d 55′ 48″; on feroit cette proportion 1d 55′ : 1d 55′ 48″ : : le sinus de 1d 55′ est au quatrième terme, qui (à cause que les petits arcs sont proportionnels à leurs sinus) sera sans erreur sensible, le sinus de 1d 55′ 48″. Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en secondes; et alors prenant dans les Tables le logarithme du sinus de 1d 55′ qui est le troisième terme, on lui ajoutera le logarithme de 1d 55′ 48″ réduits en secondes; enfin du total on retranchera le logarithme de 1d 55′ réduits en secondes, le reste (*Arith.* 232) sera le logarithme du quatrième terme, c'est-à-dire, le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc au-dessous de 3 degrés, et dont on a le sinus, on chercheroit d'abord dans les Tables, quel est le nombre de degrés et minutes; puis on feroit cette proportion: le sinus du nombre de degrés et minutes trouvés, est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés et minutes réduits en secondes, est au nombre total de secondes de l'arc cherché; ainsi, par logarithmes, l'opération se réduira à prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus du nombre de degrés et minutes immédiatement au-dessous, et à ajouter ce logarithme au logarithme de ce nombre de degrés et minutes réduits en secondes; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc, je trouve dans les Tables, que le nombre de degrés et minutes le plus approchant est 2d 24′, et que la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus de ce dernier arc, est 0013811; j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de 2d 24′ réduits en secondes; la somme 3,9378948 répond dans les Tables de logarithmes, à 8667; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui par conséquent est de 2d 24′ 27″. Cette règle est l'inverse de la précédente.

A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes regles en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont en-

tre 87 degrés et 90 degrés, pour lesquels on suivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la règle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, et retranchez ce logarithme du double du logarithme du rayon. En effet, selon ce qui a été dit, (280) la tangente est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont la cotangente, le rayon et le rayon. Et si au contraire on avoit le logarithme de tangente d'un arc qui, devant être entre 87 degrés et 90 degrés, devroit avoir des secondes; on retrancheroit ce logarithme, du double du logarithme du rayon, et on auroit le logarithme de la tangente du complément qui étant nécessairement entre 0 degré et 3 degrés, se détermineroit facilement d'après ce qui précède; prenant le complément de l'arc ainsi trouvé, on auroit l'arc cherché.

293. Puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double; si l'on descendoit par le principe donné (282), jusqu'au sinus de l'arc le plus approchant d'une seconde, et qu'en doublant ce sinus, on répétat ce double autant de fois que l'arc dont il est la corde, est contenu dans la demi-circonférence, il est visible qu'on auroit un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence; mais plus petit; et si par la proportion donnée (278) on calculoit la tangente du même arc, et que l'ayant doublée, on répétàt ce double autant de fois que le double de cet arc est contenu dans la demi-circonférence, on trouveroit un nombre fort approchant de la demi circonférence; mais plus grand; on peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diametre à la circonférence: nous ne nous arrêtons pas à ce calcul, parce que nous donnerons ailleurs une méthode plus expéditive. Quoiqu'il en soit, on trouveroit par cette méthode, que le rayon étant supposé de 10000000000, la demi-circonférence seroit entre 31415926536 et 31415926535.

Concluons donc de là que le rayon étant 1, les 180 degrés de la demi-circonférence valent 3,1415926535, le degré vaut 0,01745329252; la minute vaut 0,000290888208; la seconde vaut 0,0000048481; et ainsi de suite. Nous rapportons ici ces nombres, parce qu'ils peuvent souvent être utiles. Par exemple, veut-on savoir quel espace occuperoit une minute de degré sur l'octant avec lequel on observe les hauteurs à la mer, cet octant étant supposé de 20 pouces de rayon. Par la construction de cet instrument, les 90° sont représentés par un arc de 45; ainsi l'intervalle entre deux divisions consécutives, est celui qu'occuperoit un degré, dans un cercle dont le rayon seroit moitié moindre, ou de 10 pouces; donc la minute sur un pareil instrument, ne répond qu'à l'espace qu'elle occuperoit sur une circonférence de 10 pouces, ou 120 lignes. Multiplions donc 120 par 0,00029 valeur de la minute, en se bornant aux 5 premiers chiffres, nous aurons 0,03480 ou 0,0348, c'est-à-dire, $\frac{348}{10000}$ de ligne, ou $\frac{1}{29}$ de ligne à peu près. On voit par-là qu'on ne peut guere répondre d'une minute en observant avec cet instrument. Nous aurons occasion d'en parler ailleurs.

De la résolution des Triangles-rectangles.

294. Nous avons dit ci-dessus (267), que pour être en état de calculer ou de résoudre un triangle, il falloit connoître trois des six parties qui le composent, et que parmi les trois choses connues, il falloit qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc dans les triangles-rectangles, de connoître deux choses différentes de l'angle droit; mais il

CA du côté CE soit le rayon des tables ; et ayant imaginé l'arc AB, la perpendiculaire AD élevée sur AC au point A, sera la tangente de l'angle C ou FCE, alors à cause des triangles semblables CAD, CEF, on aura CA : AD : : CE : EF, c'est-à-dire, R : tang. FCE : : CE : EF, ce qui fait la seconde des deux analogies énoncées ci-dessus.

On prouvera de la même manière, que R : tang. CFE : : EF : CE.

297. Dans les applications qui vont suivre, nous emploierons toujours les logarithmes des sinus, tangentes, etc. au lieu des sinus, tangentes, etc. et pour familiariser les Commençans avec l'usage des complémens arithmétiques, nous en ferons usage dans tous les calculs, à l'exception des cas, où le logarithme à retrancher seroit celui du rayon, dont la caractéristique étant 10, la soustraction est très-facile. Mais pour ne point obliger ceux qui n'auroient que la premiere édition de l'Arithmétique, à recourir à la seconde, nous allons exposer ici, en peu de mots, l'idée et l'usage des complémens arithmétiques.

Le complément arithmétique d'un nombre se prend en retranchant de 9, chacun des chiffres de ce nombre, excepté le dernier sur la droite, qu'on retranche de 10. Ainsi le complément arithmétique d'un nombre peut se prendre à l'inspection de ses chiffres, sans aucune opération.

Les compléments arithmétiques servent à changer les soustractions en additions. Ainsi, si de 78549 je veux retrancher 65647 ; je puis à cette opération substituer l'addition de 78549 avec 34353 qui est le complément arithmétique de 65647 ; alors il ne s'agit plus que d'ôter

une unité au premier chiffre de la gauche de la somme; on ôteroit deux unités si l'on avoit ajouté deux complémens arithmétiques; et ainsi de suite. Dans le cas présent, la somme seroit 112903, de laquelle supprimant une unité au premier chiffre, il reste 12902, qui est précisément ce que l'on auroit eu, si de 78549 on avoit retranché 65647 selon la regle ordinaire.

La raison est facile à appercevoir en observant que le complément arithmétique de 65647, n'est autre chose que 100000 moins 65647; ainsi quand on a ajouté le complément arithmétique, on ajoute 100000 et on retranche 65647; le résultat renferme donc 100000 de trop; c'est-à-dire, que son premier chiffre est trop fort d'une unité.

Donc puisque (*Arith.* 232) pour faire une regle de *Trois*, par logarithmes, il faut ajouter les logarithmes des deux moyens, et retrancher le logarithme du premier terme, on pourra, en vertu de l'observation précédente, faire une somme des logarithmes des deux moyens, et du complément arithmétique du logarithme du premier terme; et l'on diminuera d'une unité le premier chiffre de la gauche du résultat.

Après ces observations, venons à l'application des deux analogies démontrées ci-dessus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

EXEMPLE I. *Déterminer la hauteur* AC *d'un édifice* (fig. 150), *par des mesures prises sur le terrein.*

On s'éloignera de cet édifice à une distance CD, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point D au pied et au sommet de l'édifice, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90d; et ayant mesuré cette

distance CD, on fixera au point D le pied d'un graphomètre. On disposera cet instrument de manière que son plan soit vertical et dirigé vers l'axe AC de la tour, et que son diamètre fixe HF, soit horizontal, ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre; ce fil doit alors raser le bord de l'instrument et répondre à 90d. On fera mouvoir le diamètre mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir à travers leurs pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet A de l'édifice; alors on observera sur l'instrument le nombre des degrés de l'angle FEG, qui est aussi celui de son opposé au sommet AEB.

Cela posé, la hauteur AC de l'édifice, étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à BE; c'est pourquoi on a un triangle-rectangle ABE, dans lequel, outre l'angle droit, on connoît BE égal à CD qu'on a mesuré, et l'angle AEB; on cherche la valeur de AB; on voit donc que les trois choses connues, et celle que l'on cherche, sont les termes de l'analogie du nº 296; donc, pour trouver AB, on fera cette proportion, R : tang. AEB : : BE : AB.

Supposons, par exemple, que la distance CD ou BE ait été trouvée de 132 pieds, et l'angle AEB de 48d 54′.

On aura R : tang. 48d 54′ : : 132p : AB; de sorte que prenant dans les tables la valeur de la tangente de 48d 54′, la multipliant par 132, et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de AB, auquel ajoutant la hauteur ED de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AC.

Mais on peut abréger considérablement le calcul en employant, au lieu de ces nombres, leurs logarithmes; parce qu'alors il ne s'agit plus (*Arith.* 232) que d'ajouter les logarithmes du

second et du troisieme termes, et de retrancher le logarithme du premier; c'est pourquoi on fera le calcul comme il suit :

Log. tang. 48d 54′..................	10,0593064
Log. 132..........................	2,1205739
Somme............................	12,1798803
Log. du rayon.....................	10,0000000
Reste au log. de AB................	2,1798803

Qui répond dans les tables à 151,32, à moins d'un centième près; ainsi AB est de 151P et 32 centièmes, ou 151P 3p 10l.

Remarquons, en passant, que le logarithme du rayon ayant 10 pour caractéristique, et des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, et se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dixaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

EXEMPLE II. On a couru, en partant d'un point connu *A* (*Fig.* 151), 32 lieues sur la ligne *AB* parallele à la ligne *GF* qui marque le Nord-Nord-Est : on demande combien on a avancé vers l'Est, et de combien vers le Nord.

On imaginera par les deux points *A* et *B* les deux lignes *AC* et *BC* paralleles, la premiere à la ligne Nord et Sud *NS*, et la seconde à la ligne Est et Ouest *EO*; comme ces deux lignes font un angle droit, le triangle *ACB* sera rectangle en *C*; on connoît dans ce triangle, le côté *AB* qui est de 32 lieues, et l'angle *CAB* qui, à cause des paralleles, est égal à l'angle *NDF*, lequel, à cause que *DF* marque le Nord-Nord-Est, est de 22° 30′ ou le quart de 90°.

On fera donc pour trouver *BC*, cette analogie (285) *R* : *sin.* 22° 30′ :: 32′ : *BC*.

Et pour trouver AC, on remarquera que l'angle B est complément de l'angle A; c'est pourquoi on fera cette analogie (295) R : *sin.* 67° $30'$: : $32'$: AC.

On fera ces deux opérations, par logarithmes, comme il suit :

Log. sin. 22° 30'	9,5828397
Log. 32	1,5051500
Somme	11,0879897
Log. du Rayon	1
Reste ou *log.* de *BC*	1,0879897

Qui répond à 12, 25 à moins d'un centième près.

Log. sin. 67° 30'	9,9656153
Log. 32	1,5051500
Somme	11,4707653
Log.	1
Reste ou *log.* de *AC*	1,4707653

Qui répond à 29, 56 à moins d'un centième près.

Ainsi on s'est avancé de 12 lieues et 25 centièmes ou $\frac{1}{4}$, vers l'Est, et de 29 lieues et 56 centièmes, vers le Nord.

Le nombre de lieues qu'on a courues selon l'une et l'autre de ces deux directions, sert à déterminer le lieu B de la terre où se trouve un Vaisseau lorsqu'il a parcouru AB; mais le nombre de lieues courues vers l'Est, a besoin d'une correction dont ce n'est pas encore ici le lieu de parler. Il ne s'agit, quant à présent, que des premiers usages de la Trigonométrie.

EXEMPLE III. On a couru 42 lieues selon la ligne *AB* dont la position est inconnue, et on sait qu'on a avancé de 35 lieues au Nord : on demande la direction de la route *A B*, c'est-à-dire, quel air de vent on a suivi ?

On connoît donc ici le côté *A C* de l'angle droit et l'hypothénuse, et il s'agit de trouver l'angle *CAB*. Comme les deux angles *A* et *B* font ensemble un angle droit, nous connoîtrons l'angle *A*, si nous pouvons déterminer l'angle *B*. Or, pour trouver celui-ci, nous n'avons qu'à faire cette analogie (295) *R* : *sin. B* : : *AB* : *AC*.

C'est-à-dire : *R* : *sin. B* : : 42 : 35, ou bien en écrivant le second rapport à la place du premier, 42 : 35 : : *R* : *sin. B*.

Faisant l'opération par logarithmes, on a :

Log. 35..............................	1,5440680
Log. du Rayon........................	10.......
Complément arithmétique du log. de 42......	8,3767507
Somme ou *log.* du Sinus de *B*...........	~~1~~9,9208187

Qui dans les Tables, répond à 56° 27′; donc l'angle *A*, ou l'air de vent, est de 33° 33′.

EXEMPLE IV. On a couru selon la ligne *AB*, dont la position et la grandeur sont inconnues; mais on sait qu'on a avancé de 15 lieues à l'Est, et de 35 lieues au Nord : on demande la direction et la longueur de la route.

On connoît donc ici les deux côtés *AB* et *BC* de l'angle droit, et l'on demande les angles et l'hypothénuse. Pour trouver l'angle *A*, on fera cette analogie (296) *AC* : *BC* : : *R* : *tang. A*, c'est-à-dire, 35 : 15 : : *R* : *tang. A*.

Et faisant l'opération par logarithmes :

Log. 15	1,1760913.
Log. du Rayon	10.........
Complément arithmétique du log. de 35	8,4559320
Somme ou *log. tang. A*	19,6320233

Qui dans la Table, répond à 23° 12'.

Pour avoir AB, on peut, quand on a déterminé l'angle A, se conduire comme dans l'Exemple III. Mais il n'est pas nécessaire de calculer l'angle A; la proposition démontrée (164 et 166) suffit : ainsi prenant le quarré de 15 qui est 225, et l'ajoutant au quarré de 35 qui est 1225, on aura 1450 pour le quarré de AB; et tirant la racine quarrée, on aura 38,08 pour la valeur de AB, à moins d'un centieme près.

Par la même raison, si l'hypothénuse AB, et l'un AC des côtés de l'angle droit, étant donnés, on demandoit l'autre côté BC; il ne seroit pas nécessaire de calculer l'angle A; on retrancheroit (166) le quarré du côté connu AC, du quarré de l'hypothénuse AB; la racine quarrée du reste, seroit la valeur du côté BC.

C'est encore par la résolution des triangles rectangles qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon AD (*Fig.* 152) par lequel on vise à l'horizon de la mer lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité AB au-dessus d'un point B de sa surface, ne soit parallele à la surface de la mer.

Comme le rayon visuel AD est alors une tangente, si l'on imagine le rayon CD, l'angle D sera droit (48); or on connoît le rayon CD de la terre qui est 19611500 pieds. Et si au rayon CB de 19611500, on ajoute la hauteur AB à laquelle on est au-dessus de B, on aura le côté AC; on connoîtra donc deux choses

outre l'angle droit ; on pourra donc calculer l'angle *CAD*, dont la différence *DAO* avec un angle droit, sera l'abaissement du rayon *AD* au-dessous du rayon *AO* parallele à la surface de la mer en *B*.

Si dans le même triangle *ADC* on calcule le côté *AD*, on aura la plus grande distance à laquelle la vue puisse s'étendre, lorsque l'œil est à la hauteur *AB*. Mais comme les Tables ordinaires ne peuvent pas donner l'angle *CAD*, et le côté *AD*, avec une précision suffisante, lorsque *AB* est une très-petite quantité à l'égard du rayon de la terre ; voici comment on peut y suppléer.

On concevra *AC* prolongé jusqu'à la circonférence en *E* ; alors *AE* étant une sécante, et *AD* une tangente, selon ce qui a été dit (129) on aura *AE* : *AD* :: *AD* : *AB*; ainsi pour avoir *AD*, on prendra (*Arith.* 178) une moyenne proportionnelle entre *AE* et *AB*.

Par exemple, si l'œil *A* étoit élevé de 20 pieds au-dessus de la mer ; *AB* seroit de 20 pieds, et *AE* seroit de deux fois 19611500 pieds, plus 20, c'est-à-dire, de 39223020 pieds ; le quarré de *AD* seroit donc de 39223020 × 20 ou de 784460400, donc (*Arith.* 178 et 179) *AD* seroit de 28008 pieds ; c'est-à-dire, qu'un œil élevé de 20 pieds au-dessus de la surface de la mer, peut découvrir jusqu'à 28008 pieds, ou une lieue et $\frac{2}{3}$, à la ronde.

Maintenant, pour savoir de combien le rayon visuel *AD* est abaissé à l'égard de l'horizontal *AO* ; on remarquera que vu la petitesse de *AB*, la ligne *AD* ne peut différer sensiblement de l'arc *BD*; ainsi l'arc *BD* est de 28008 pieds. Or puisque le rayon est de 19611500 pieds, on

trouvera facilement (152) que la circonférence est 123222688; et par conséquent (153) on trouvera le nombre de degrés de l'arc *BD*, par cette proportion 123222688 : 28008 :: 360° : à un quatrieme terme, que l'on trouve 0° 4′ 54″; ainsi l'angle *ACD*, et par conséquent *DAO*, est de 0° 4′ 54″, lorsque *AB* est de 20 pieds.

Résolution des Triangles obliquangles.

298. On se sert du terme de *triangles obliquangles*, pour désigner en général, les triangles qui n'ont point d'angle droit.

299. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle, est au côté opposé à cet angle, comme le sinus de tout autre angle du même triangle, est au côté qui lui est opposé.*

Car si l'on imagine un cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 153), et qu'ayant tiré les rayons DA, DB, DC, on décrive d'un rayon D*b* égal à celui des Tables, le cercle *abc*; qu'enfin on tire les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de section *a*, *b*, *c*; il est facile de voir que le triangle *abc* est semblable au triangle A B C; car les lignes D*a*, D*b* étant égales sont proportionnelles aux lignes DA, DB; donc (105) *ab* est parallèle à AB; on prouvera de même que *bc* est parallèle à BC, et *ac* parallèle à AC; donc (111) AB : *ab* :: BC : *bc*, ou AB : ½ *ab* :: BC : ½ *bc*; or la moitié de la corde *ab* est (270) le sinus de *ah* moitié de l'arc *ahb*; et cette moitié de l'arc *ahb* est la mesure de l'angle *acb* qui a son sommet à la circonférence, et qui est égal à l'angle ACB; donc ½ *ab* est le sinus de l'angle

ACB ; on prouvera de même que $\frac{1}{2}$ bc est le sinus de l'angle BAC ; donc AB : sin. ACB : : BC : sin. BAC.

300. Cette proposition sert à résoudre un triangle. 1.° Lorsqu'on connoît deux angles et un côté. 2.° Lorsqu'on connoît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés.

I. Cas. Si l'on connoît l'angle B, l'angle C, et le côté BC (*Fig.* 65) on aura l'angle A, en ajoutant les deux angles B et C, et retranchant leur somme 180°; et pour avoir les deux côtés AC et AB, on fera les deux proportions :

$$\sin. A : BC :: \sin. B : AC$$
$$\sin. A : BC :: \sin. C : AB$$

C'est ainsi qu'on peut résoudre par le calcul, la question que nous avons examinée (121). Par exemple, si l'angle B a été observé de 78° 57', l'angle C de 47° 34', et le côté BC de 184 pieds, on aura 53° 29', pour l'angle A, et l'on trouvera les deux autres côtés, par ces deux proportions.

$$\sin. 53^\circ 29' : 184 :: \sin. 78^\circ 57' : AC$$
$$\sin. 53^\circ 29' : 184 :: \sin. 47^\circ 34' : AB$$

Faisant ces opérations par logarithmes comme il suit :

Log. 184	2,2648178
Log. sin. 78° 57'	9,9918727
Complément arithmétique du log. sin. 53° 29'	0,0949148
Somme ou log. AC	12,3516058

Log. 184...........................	2,2648178
Log. sin. 47° 34'........................	9,8680934
Complément arithmétique du log. sin. 53° 29'..	0,0949148
Somme *ou log. AB*........................	x2,2278260

On trouvera que *AC* est de 224^p, 7, et *AB* de 169^p.

II. Cas. Si l'on connoît le côté *AB* (*Fig.* 141), le côté *B C* et l'angle *A*, on déterminera l'angle *C* en calculant son sinus par cette proportion :

BC : *sin. AB* : : *sin. AB* : *sin. C.*

Mais il faut remarquer, selon ce que nous avons déjà dit ci-dessus (267), que l'angle *C* ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus.

Par exemple, que *AB* soit de 68 pieds, *BC* de 37, et l'angle *A* de 32° 28', la proportion sera 37 : *sinus* 32° 28 : : 68 : *sin. C.*

On trouvera, en opérant comme ci-dessus, que ce sinus répond, dans les Tables, à 80° 36'; mais comme le sinus d'un angle appartient aussi au supplément de cet angle, on ne sait si l'on doit prendre 80° 36', ou son supplément 99° 24'; mais si l'on sait que l'angle cherché doit être aigu, alors on est sûr qu'il est, dans ce cas-ci, de 80° 36', et le triangle a alors la figure *ABC*; si au contraire il doit être obtus, il sera de 99° 24', et le triangle aura la figure *A B D.*

Avant d'établir les deux propositions qui servent à résoudre les autres cas des triangles, il convient de placer ici une proposition qui nous sera utile pour l'application de ces deux propositions.

301. *Si l'on connoît la somme de deux quantités, et leur différence, on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence, à la moitié de la somme; et la plus petite, en retranchant au contraire, la moitié de la différence, de la moitié de la somme.*

Par exemple : si je sais que deux quantités font ensemble 57, et qu'elles diffèrent de 17, j'en conclus que ces deux quantités sont 37 et 20; en ajoutant d'une part la moitié de 17 à la moitié de 57, et retranchant de l'autre part, la moitié de 17, de la moitié de 57.

En effet, puisque la somme comprend la plus grande et la plus petite, si à cette somme on ajoutoit la différence, elle comprendroit alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, si de la somme on ôtoit la différence, il resteroit le double de la plus petite; donc la plus petite vaudroit la moitié du reste, c'est-à-dire, la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 et 155), *si de l'un des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura toujours cette proportion : le côté* AC *sur lequel tombe ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme* AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés, est à la différence des segmens* AD *et* DC, *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.*

Décrivez du point B comme centre, et d'un

rayon égal au côté BC, la circonférence CEHF, et prolongez le côté AB, jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE et AC sont deux sécantes tirées d'un même point, pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (127), on aura cette proportion, AC : AE : : AG : AF.

Or AE est égale à AB + BE ou AB + BC; AG est égale à AB — BG ou AB — BC; et AF est (*fig.* 154) égale à AD — DF ou (52) à AD — DC; donc AC : AB + BC : : AB — BC : AD — DC. Dans la *figure* 155, AF est égale à AD + DF ou AD + DC; on a donc, dans ce cas, AC : AB + BC : : AB — BC : AD + DC.

303. Donc lorsqu'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connoître les segmens formés par la perpendiculaire menée d'un des angles, sur le côté opposé; car alors on connoît (*fig.* 154) la somme AC de ces segmens, et la proportion qu'on vient d'enseigner, fait connoître leur différence, puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus : on connoîtra donc chacun des segmens, par ce qui a été dit (301). Dans la *figure* 155, on connoît la différence des segmens AD et CD, qui est le côté même AC, et la proportion détermine la valeur de leur somme.

304. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question : *Connoissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles.*

On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles ADB, CDB.

On calculera par la proposition précédente, (303)

l'un des segmens, CD, par exemple; et alors dans le triangle rectangle CDB, connoissant deux côtés BC et CD, outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle C, par ce qui a été dit (295).

EXEMPLE. Le côté AB est de 142 pieds, le côté BC de 64, et le côté AC de 184, on demande l'angle C.

Je calcule la différence des deux segmens AD et DC, par cette proportion, 184 : 142+64 : : 142—64 : AD—DC, ou 184 : 206 : : 78 : AD —DC que je trouve valoir 87,32; donc (301) le petit segment CD vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,32; c'est-à-dire, qu'il vaut 48,34.

Cela posé, dans le triangle rectangle CDB, je cherche l'angle CBD, qui étant une fois connu, fera connoître l'angle C, et pour trouver cet angle CBD, je fais cette proportion (295), BC : CD : : R : sin. CBD, c'est-à-dire, 64 : 48,34 : : R : sin. CBD.

Opérant par logarithmes,

Log. de 48,34	1,6843066
Log. du rayon	1........
Complément arith. du log. de 64	8,1938200
Somme ou log. sin. CBD	x9,8781266

Qui, dans les Tables, répond à $49^{d}\ 3'$; donc l'angle C est de $40^{d}\ 57'$.

On peut résoudre ce même cas, par cette autre regle, dont nous ne donnerons la démonstration que dans la troisieme Partie de ce Cours.

De la moitié de la somme des trois côtés, retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux restes.

Faites ensuite cette proportion :

Le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est au produit des deux restes, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché; ce qui, en employant les logarithmes, se réduit à cette regle.

Au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des deux restes, et du tout retranchez la somme des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui restera, sera le logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché; prenez la moitié de ce reste; ce sera (*Arith.* 230) le logarithme de ce sinus, que vous chercherez dans les Tables; ayant alors la moitié de l'angle, il n'y aura plus qu'à doubler cette moitié.

Ainsi, dans l'exemple que nous venons de proposer, j'ajouterai les trois côtés 184, 64, 142, et de 195, moitié de leur somme, je retrancherois successivement 184 et 64, ce qui me donneroit 11 et 131 pour restes. Alors ajoutant à 20,0000000 double du logarithme du rayon, les logarithmes, 1,0413927; 2,1172713 des restes 11 et 131, j'aurois 23,1586640, duquel retranchant la somme 4,0709978 des logarithmes 1,8061800 et 2,2648178 des côtés 64 et 184, il me resteroit 19,0876662, dont la moitié 9,5438331 est le logarithme du sinus de la moitié de l'angle C; on trouve dans les Tables, que cette moitié est $20^{\circ}\ 28'\ \frac{1}{2}$ à peu près, dont le double est $40^{\circ}\ 57'$, comme ci-dessus.

En faisant usage des complémens arithmétiques, l'opération se réduit à l'addition suivante : . . .

	20,0000000
	1,0413927
	2,1172713
	8,1938200
	7,7351822
Somme.	39,0876662

diminuant le premier chiffre de deux unités, on a le même résultat que par l'opération précédente, mais plus briévement.

Cette proposition peut servir à calculer les distances, lorsqu'on n'a point d'instrument pour mesurer les angles ; c'est le moyen de faire, par le calcul, ce qu'il étoit question de faire par lignes, au n° (122).

Le cas où l'on a à résoudre un triangle dont on connoît les trois côtés, peut arriver souvent, lorsqu'on a à calculer plusieurs triangles dépendants les uns des autres.

305. *Dans tout triangle rectiligne, la somme des deux côtés, est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car selon ce qui a été dit (299) on a (*fig.* 156) AB : sin. C : : AC : sin. B ; donc (67) AB + AC : AB—AC : : sin. C + sin. B : sin. C—sin. B ; or (286) sin. C + sin. B : sin. C—sin B : : tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$; donc AB + AC : AB — AC : : tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$.

306. Cette proposition sert à *résoudre un triangle, dont on connoît deux côtés et l'angle compris.* Car si l'on connoît l'angle A, par exemple, on connoît aussi la somme des deux angles B et C, en retranchant l'angle A de 180 degrés. Donc en prenant la moitié du reste qu'on aura par cette soustraction, et cherchant sa tangente dans les Tables, on aura, avec les deux côtés AB et AC supposés connus, trois termes de connus dans la proportion qu'on vient de démontrer ; on pourra donc calculer le quatrième, qui fera connoître la moitié de la différence des deux angles B et C. Alors connoissant la

la demi-somme et la demi-différence de ces angles, on aura (301) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme ; et le plus petit, en retranchant, au contraire, la demi-différence, de la demi-somme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aisément le troisième côté, par la proposition enseignée (299).

Exemple. Supposons que le côté AB soit de 142 pieds, le côté AC de 120, et l'angle A de 48 degrés; on demande les deux angles C et B et le côté BC.

Je retranche 48 degrés de 180 degrés, et il me reste 132 degrés pour la somme des deux angles C et B, et par conséquent 66 degrés pour leur demi-somme.

Je fais cette proportion, $142+120 : 142-120 :: \text{tang.}\ 66^d : \text{tang.}\ \frac{C-B}{2}$

Ou $262 : 22 :: \text{tang.}\ 66^d : \text{tang.}\ \frac{C-B}{2}$

Et opérant par logarithmes,

Log. tang. 66	10,3514169
Log. 22	1,3424227
Complément arithm. du log. de 262....	7,5816987
Somme ou log. de la demi-différ........	19,2755383

Qui dans la Table, répond à 10d 41'.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66d, et la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on voit ici,

66d 0'	66d 0'
10 41'	10 41'
L'angle C......76d41'.	L'angle B...55d19'

Enfin pour avoir le côté BC, je fais cette proportion, *sin.* C : AB :: *sin.* A : BC ; c'est-à-dire, *sin.* 76d 41' : 142P :: *sin.* 48d : BC.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que BC vaut 108P, 4.

307. Tels sont les moyens qu'on peut employer

pour la résolution des triangles : voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en faire aux figures plus composées.

308. Supposons que C et D (fig. 157) *sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connoître la distance.*

On mesurera une base AB, des extrémités de laquelle on puisse appercevoir les deux objets C et D. On observera au point A les angles CAB, DAB, que font, avec la ligne AB, les lignes AC, AD, qu'on imaginera aller du point A aux deux objets C et D ; on observera de même au point B, les angles CBA, DBA.

Cela posé, on connoît dans le triangle CBA, les deux angles CAB, CBA et le côté AB ; on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (300). Pareillement dans le triangle ADB, on connoît les deux angles DAB, DBA et le côté AB; ainsi on pourra par le même principe, calculer le côté AD ; alors, en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connoît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, et l'angle compris CAD; car cet angle est la différence des deux angles mesurés CAB, DAB ; on pourra donc calculer le côté CD (306).

309. On peut aussi, par ce même moyen, savoir quelle est la direction de CD, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne; car, dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD que CD fait avec AC; or si par le point C on imagine une ligne CZ parallèle à AB, on sait que l'angle ACZ est supplément de CAB, à cause des parallèles (40); donc, prenant la différence de l'angle connu ACZ, à l'angle calculé ACD, on aura l'angle DCZ que CD fait avec CZ ou avec sa parallèle AB ; et comme il est fort aisé d'orienter AB, on aura donc aussi la direction de CD.

310. Nous avons dit, en parlant des lignes, (3) que nous donnerions le moyen de *determiner differens points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités l'une de l'autre* : voici comment on peut s'y prendre.

On choisira un point C (*fig.* 158) hors de la ligne AB dont il s'agit, et qui soit tel qu'on puisse, de ce point, appercevoir les deux extrémités A et B ; on mesurera les distances AC et CB, soit immédiatement, soit en formant

des triangles dont ces lignes deviennent côtés, et qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent. (308)

Alors dans le triangle ACB, on connoîtra les deux côtés AC et CB, et l'angle compris ACB; on pourra donc (306) calculer l'angle BAC.

Cela posé, on fera planter selon telle direction CD qu'on voudra, plusieurs piquets, et ayant mesuré l'angle ACD, on connoîtra dans le triangle ACD le côté AC et les deux angles A et ACD; on pourra donc (300) calculer le côté CD; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction CD, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée, et le point D où l'on s'arrêtera sera dans l'alignement des deux points A et B.

311. S'il n'étoit pas possible de trouver un point C duquel on pût appercevoir à la fois les deux points A et B, on pourroit se retourner de la manière suivante.

On chercheroit un point C (*fig.* 159) d'où l'on pût appercevoir le point B, et un autre point E d'où l'on pût voir le point A et le point C. Alors mesurant ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédens, les distances AE, EC et CB, on observeroit au point E l'angle AEC, et au point C l'angle ECB. Cela posé dans le triangle AEC, connoissant les deux côtés AE, EC, et l'angle compris AEC, on calculeroit par ce qui a été dit (306) le côté AC et l'angle ECA; retranchant l'angle ECA de l'angle observé ECB, on auroit l'angle ACB; et comme on vient de calculer AC, et qu'on a mesuré CB, on retomberoit dans le cas précédent, comme si les deux points A et B eussent été visibles du point C; on achevera donc de la même manière.

312. *Mesurer une hauteur dont le pied est inaccessible, comme seroit la hauteur d'une montagne* (fig. 160).

On mesurera sur le terrein une base FG des extrémités de laquelle on puisse appercevoir le point A dont on veut connoître la hauteur; ensuite avec le graphomètre, dont BF et CG représentent la hauteur, on mesurera les angles ABC, ACB, que font avec la base BC les lignes BA, CA, qu'on imagine aller des deux points B et C au point A; enfin à l'une des stations, en C, par exemple, on disposera l'instrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *fig.* 150, et on mesurera l'angle ACD, qui est l'inclinaison de la ligne AC, à l'égard de l'horizon; alors connoissant dans le triangle ACB;

les deux angles ABC, ACB, et le côté BC, il sera facile (300) de calculer le côté AC; et dans le triangle ADC, où l'on connoît maintenant le côté AC, l'angle mesuré ACD, et l'angle D qui est droit, puisque AD est la hauteur perpendiculaire, il sera facile de calculer AD, et on aura la hauteur du point A au-dessus du point C. Si l'on veut savoir ensuite quelle est la hauteur du point A, au-dessus du point B, ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveller ou de trouver la différence de hauteur entre les points C et B; c'est ce dont nous parlerons ci-après.

313. Nous avons dit (153) que pour calculer la surface d'un segment *AZBV* (*Fig.* 74) dont le nombre des degrés de l'arc *AVB* et le rayon sont connus, il falloit calculer la surface du triangle *IAB*, pour la retrancher de celle du secteur *IAVB*; c'est une chose facile actuellement; car dans le triangle rectangle *IZB*, on connoît, outre l'angle droit, le côté *IB* et l'angle *ZIB* moitié de *AIB* mesuré par l'arc *AVB*; on calculera donc facilement (295) *IZ* qui est la hauteur du triangle, et *BZ*, qui est la moitié de la base.

On peut encore conclure de ce qui précede, le moyen de faire un angle ou un arc d'un nombre déterminé de degrés et minutes. On tirera une droite *CB* (*Fig.* 145) de grandeur arbitraire, que l'on prendra pour côté de l'angle; et ayant imaginé l'arc *BDA* décrit du point *C*, le rayon *CA* et la corde *BA*, si l'on imagine la perpendiculaire *CI* et si l'on mesure *CB*, on connoîtra, dans le triangle rectangle *CIB*, l'angle droit, le côté *CB* et l'angle *BCI* moitié de celui dont il s'agit; on pourra donc calculer *BI*, dont le double sera la valeur de la corde *AB*; ainsi, prenant une ouverture de compas, égale à ce double, du point *B* comme centre, on marquera

le point A sur l'arc BDA, et tirant CA, on aura l'angle demandé.

Nous pourrions indiquer ici, une infinité d'autres usages de la Trigonométrie : mais en voilà assez pour mettre sur la voie; d'ailleurs nous aurons assez d'occasions, par la suite, d'avoir recours à cette partie.

Du Nivellement.

314. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane, comme elle le paroît, mais courbe, et même sphérique, ou, à très-peu de chose près, sphérique. Lorsqu'un Vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or si la surface de la terre étoit plane, en même temps qu'on découvre la tour B (*fig.* 161), on devroit appercevoir tout le terrein adjacent ABC. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que la surface DAC de la Terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale BD du Vaisseau. Deux points D et B peuvent donc paroître dans une même ligne horizontale DB, quoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, et par conséquent du centre T de la Terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche la surface de la mer, ou parallèlement à ce plan, qu'on appelle *plan horizontal;* et une *ligne verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal.

Niveller, c'est déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre, à l'égard du centre de la Terre.

315. Lorsque l'un de ces objets vu de l'autre,

paroît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la Terre. Pour connoître cette différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut appercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite, pour que cette distance DI (*fig.* 161) mesurée sur la surface de la Terre, puisse être regardée comme égale à la tangente DB ; or on a vu (129) que la tangente DB étoit moyenne proportionnelle entre toute sécante menée du point B, et la partie extérieure BI de cette même sécante ; mais à cause de la petitesse de l'arc DI, on peut regarder la sécante qui passe par le point B et le centre T, comme égale au diamètre ; c'est-à-dire, au double de IT ou au double de DT ; donc BI sera le quatrième terme de cette proportion, 2 DT : DI : : DI : BI.

Supposons, par exemple, que *DI* mesuré sur la surface de la terre, soit de 1000 toises ou 6000 pieds ; comme le rayon de la terre est de 19611500 pieds, on trouvera *BI* par cette proportion, 39223000 : 6000 : : 6000 : *BI* ; en faisant le calcul, on trouve, $0^{p},91783$, qui reviennent à 11^{p} 0^{l} 2^{pts} ; c'est-à-dire, qu'entre deux objets *B* et *D* éloignés de mille toises, et qui seroient dans une même ligne horizontale, la différence *BI* du niveau ou de distance au centre de la terre, est de 11^{p} 0^{l} 2^{pts}.

316. Quand on a calculé une différence de niveau, comme *BI*, on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que les distances *BI*, *bi*, sont presque parallèles et égales aux lignes *DQ*, *Dq*, qui (173) sont entr'elles comme les quarrés des cordes ou des arcs *DI*, *Di* ; car ici, les cordes et les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre.

Ainsi pour trouver la différence bi de niveau, qui répondroit à 5000 pieds, je ferai cette proportion, $\overline{8000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,91783 : bi$, que je trouve, en faisant le calcul, de 0,63738 ou 7po 7l 9 ½.

317. Ces notions supposées, pour connoître la différence de niveau de deux points *B* et *A* (*fig.* 163) qui ne sont pas dans la ligne horizontale menée par l'un d'entr'eux, on emploiera un instrument propre à mesurer les angles que l'on disposera, comme il a été dit dans l'exemple relatif à la *fig.* 150; on observera l'angle BCD, et ayant mesuré la distance CD ou CI à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement, et à diverses reprises, au-dessus du terrein AVB, on pourra, dans le triangle CDB, considéré comme rectangle en D, calculer BD, auquel on ajoutera la hauteur CA de l'instrument, et la différence DI de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (315 et 316).

Mais comme cette manière d'opérer suppose une grande exactitude dans la mesure de l'angle BCD et un instrument bien exact, on préfère souvent d'aller au même but, par une voie plus longue, que nous allons décrire.

318. On emploie, à cet effet, un instrument tel que le représente la *Figure* 194. C'est un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en A et en B. Dans les deux parties éminentes AC, BD, on fait entrer deux tuyaux de verre I et K, mastiqués avec les parties AC, BD. On remplit d'eau tout le canal jusqu'à ce qu'elle s'élève dans les deux tuyaux de verre; quand elle est à égale hauteur dans chacun, on est sûr que la ligne qui passe par la superficie de l'eau élevée dans chacun de ces deux tuyaux, est une ligne horizontale, et on l'emploie de la maniere suivante.

On fait plusieurs stations, par exemple, aux points D, *C*, *B*, (*Fig.* 165) : ayant fait élever aux deux points *A* et *N*, deux jallons, l'observateur qui est en *D*, vise successivement à chacun de ces deux jallons, et fait marquer les deux points *E* et *F*, qu'on nomme points de *mire*. Faisant ensuite planter un autre jallon en quelque points *P* au-delà de *G*, on fait marquer de même les deux points de mire *G* et *H* ; on mesure à chaque station, les hauteurs *AE*, *GF*, *IH*, etc. et après leur avoir appliqué (316) la correction de niveau qui convient aux distances *KE*, *KF*, *LG*, etc. estimé grossiérement, on ajoute ces hauteurs, et on a la différence de niveau entre *A* et *B*.

Si, dans le cours de ces opérations, on n'alloit pas toujours en montant, on sent bien qu'au lieu d'ajouter, il faudroit retrancher les quantités dont on a descendu.

Comme nous ne nous proposons pas de donner ici un Traité détaillé du Nivellement, nous ne nous arrêterons pas à décrire les autres méthodes et les autres instruments qu'on peut employer.

On peut voir sur cette matière, le *Traité du Nivellement de* M. PICARD ; *Paris*, 1728.

TRIGONOMÉTRIE SPHÈRIQUE.

Notions préliminaires.

319. UN TRIANGLE sphérique, est une partie de la surface de la sphère, comprise entre trois arcs de cercle, qui ont tous trois pour centre commun, le centre de la sphère, et qui sont par conséquent trois arcs de grand cercle de cette même sphère.

Si des trois angles *A*, *F*, *G*, du triangle sphérique *AFG* (*Fig.* 166), on imagine trois rayons *AC*, *FC*, *GC* menés au centre *C* de la sphère, on peut se représenter l'espace *CAFG*, comme une pyramide triangulaire qui a son sommet *C* au centre de la sphère, et dont la base *AFG* est courbe, et fait partie de la surface de cette sphère. Les arcs *AF*, *FG*, *AG* qui sont les côtés curvilignes de la base, sont les rencontres de la surface de la sphère avec les plans *ACF*, *FCG*, *GCA* qui forment les faces de cette pyramide.

L'angle *A* compris entre les deux arcs *AF*, *AG*, se mesure par l'angle rectiligne *I A K*, compris entre les tangentes *AI*, *AK* de ces deux arcs. Chacune de ces tangentes est dans le plan de l'arc auquel elle appartient, et elles sont toutes deux perpendiculaires au rayon *CA* (48), qui est l'intersection des deux plans *ACF*, *ACG*; donc (191) l'angle compris entre ces deux

tangentes, est le même que l'angle compris entre les plans *ACF*, *ACG* des deux arcs; donc,

320. 1.° *Un angle sphérique quelconque* FAG, *n'est autre chose que l'angle compris entre les plans de ses deux côtés* AF, AG.

321. 2.° *Les angles que forment les arcs de grand cercle qui se rencontrent sur la surface d'une sphère, ont les mêmes propriétés que les angles plans;* c'est-à-dire, les propriétés énoncées (192, 193 et 194).

322. Donc *deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entr'eux, quand les plans qui les renferment, sont perpendiculaires entr'eux.*

Si l'on conçoit les deux plans *ACG*, *ACF*, prolongés indéfiniment dans tous les sens, il est visible que la section que chacun formera dans la sphère, sera un grand cercle, et que ces deux grands cercles se couperont mutuellement en deux parties égales aux points *A* et *D* de l'intersection commune *A C* prolongée; car les deux plans passant par le centre, ont pour intersection commune, un diametre de la sphère.

323. Donc *deux côtés contigus* AG, AF *d'un triangle sphérique, ne peuvent plus se rencontrer qu'à une distance* AGD *ou* AFD *de* 180°, *depuis leur origine.*

324. Si l'on prend les deux arcs *AB*, *AE* chacun de 90°, et que par les deux points *B* et *E* et le centre *C*, on conduise un plan dont la section avec la sphère forme le grand cercle

BENMO; je dis que ce cercle sera perpendiculaire aux deux cercles *ABD*, *AED*.

Car si l'on tire les rayons *BC*, *EC*, les angles *ACB*, *ACE* qui ont pour mesure les arcs *AB*, *AE*, de 90° chacun, seront droits; donc la ligne *AC* est perpendiculaire aux deux droites *CE*, *BE*; donc (180) elle est perpendiculaire à leur plan, c'est-à-dire, au cercle *BENMO*; donc les deux cercles *AED*, *ABD*, qui passent par la droite *AD*, sont aussi perpendiculaires à ce même cercle (184); donc réciproquement ce cercle leur est perpendiculaire.

Comme nous n'avons supposé aucune grandeur déterminée à l'angle GAF ou EAB, il est visible que la même chose aura toujours lieu, quelle que soit la grandeur de cet angle, et que par conséquent, le cercle BENMO est perpendiculaire à tous les cercles qui passent par la droite AD.

La droite AD s'appelle *l'axe du cercle BENMO*; et les deux points *A* et *D*, qui sont chacun sur la surface de la sphère, sont dits les *pôles* de ce même cercle.

325. Concluons donc, 1.° que *les pôles d'un grand cercle quelconque, sont également éloignés de tous les points de la circonférence de ce grand cercle; et leur distance à chacun de ces points, mesurée par un arc de grand cercle, est un arc de 90°.*

Et réciproquement, *si un point quelconque* A *de la surface de la sphère se trouve éloigné de 90°, de deux points* B *et* E *pris dans un arc de grand cercle, ce point* A *est le pôle de ce grand cercle.*

326. 2.° Que *quand un arc* B *et* F *de grand*

cercle est perpendiculaire sur un autre arc BE *de grand cercle, il passe nécessairement par le pôle de celui-ci, ou du moins, il y passeroit, étant prolongé suffisamment.*

327. 3.° Que *si deux arcs* BF, EG *de grand cercle, sont perpendiculaires à un troisième arc de grand cercle* BE, *le point* A *où ils se rencontrent, est le pôle de celui-ci.*

328. Puisque les deux droites BC, EC sont perpendiculaires au même point C de la droite AD, l'angle BCE qu'elles forment, est donc (191) la mesure de l'inclinaison des deux plans ABD, ABD ; ou de l'angle sphérique EAB ou GAF ; donc,

Un angle sphérique GAF *a pour mesure l'arc* BE *de grand cercle, que ses côtés (prolongés s'il est nécessaire) comprennent à la distance de* 90° *depuis le sommet.*

329. Si l'on conçoit que le demi-cercle ABD tourne autour du diamètre AD, et que de différents points R, B, H de sa circonférence, on abaisse sur AD, les perpendiculaires RQ, BC, HP ; il est évident,

1°. Que *chacun de ces points décrit une circonférence de cercle, qui a pour centre le point de* AD *sur lequel tombe cette perpendiculaire, et pour rayon cette perpendiculaire même.*

2.° Que *les arcs* RS, BE, HL *décrits dans ce mouvement, et interceptés entre les deux plans* ABD, AED, *sont tous d'un même nombre de degrés ;* car si l'on tire les lignes SQ, EC, LP, elles seront toutes perpendiculaires sur AD, puisqu'elles ne sont autre chose que les rayons RQ,

BC, HP, parvenus dans le plan AED; donc (191) chacun des angles RQS, BCE, HPL ou chacun des arcs RS, BE, HL mesure l'inclinaison des deux plans ABD, AED; donc tous ces arcs sont d'un même nombre de degrés.

3.° *Les longueurs de ces arcs* RS, BE, HL, *sont proportionnelles aux sinus des arcs* AR, AB, AH *qui mesurent leurs distances à un même pôle* A; *ou, ce qui revient au même, au cosinus de leurs distances au grand cercle auquel ils sont parallèles.* Car il est évident, que ces arcs étant semblables, sont proportionnels à leurs rayons RQ, BC, HP qui sont évidemment les sinus des arcs AR, AB, AH, ou les cosinus des arcs BR, o, et BH.

330. Si l'on imagine que la sphère ABDMOBN représente la terre, et AD son axe; ou celui de ses diametres autour duquel elle fait sa révolution journalière; le cercle BENMO également éloigné des deux pôles A et D, est ce qu'on appelle l'*Equateur*. Les cercles ABD, AED et tous leurs semblables, dont les plans passent par l'axe AD, se nomment des *Méridiens;* les petits cercles dont RS, HL représentent ici des parties, se nomment des *parallèles à l'équateur* ou simplement des *parallèles.* Les arcs BH, EL qui mesurent la distance d'un parallèle jusqu'à l'équateur, s'appellent la *latitude* de ce parallèle ou d'un lieu qui seroit situé sur sa circonférence.

Pour déterminer la position d'un lieu sur la terre, on le rapporte à deux cercles fixes perpendiculaires entr'eux, tels que ABDM, BNEMO, en cette manière. On prend pour cercle de comparaison, un méridien ABDM qui passe par un lieu connu et déterminé: et pour fixer la position

d'un autre lieu L, on imagine par celui-ci un autre méridien AELD. Il est visible que la position de ce méridien est connue, si l'on sait quel est le nombre de degrés de l'arc BE compris entre le point B, et le point E où ce même méridien rencontre l'équateur. Le point B étant donc le point fixe auquel on rapporte tous les autres méridiens, l'arc BE s'appelle alors *la longitude* (*) du méridien AED, et de tous les lieux situés sur ce même méridien; il ne s'agit donc plus, pour déterminer la position du lieu L, que de connoître le nombre des degrés de l'arc EL, ce qu'on appelle *la latitude* du lieu L, et qui est aussi la latitude de tous les lieux situés sur le parallèle dont HL fait partie.

On voit par-là que tous les lieux situés sur un même méridien, ont une même longitude, et que tous ceux qui sont situés sur un même parallèle ont une même latitude; mais il n'y a qu'un seul point L, (au moins dans une même moitié de la sphère) ou dans un même hémisphère, qui puisse avoir en même temps une longitude et une latitude proposées. La position d'un lieu est donc déterminée quand on connoît sa longitude et sa latitude, mais pour la latitude, il faut savoir de plus, vers quel pôle on la compte. Ainsi supposant que le pôle A soit celui du midi ou le pôle *austral*, et D le pôle du nord ou le pôle *boréal*, il faut savoir si la latitude est australe ou boréale; car on conçoit aisément qu'il peut y avoir et qu'il y a, en

(*) On est dans l'usage de compter les longitudes, d'Occident en Orient; le cercle d'où l'on part pour compter les longitudes, s'appelle *premier Méridien*: les François ont choisi celui qui passe par l'isle de Fer, la plus occidentale des Canaries.

effet, un point dans l'hémisphère austral qui est situé de la même manière que le point L l'est dans l'hémisphère boréal.

La longueur terrestre d'un degré de grand cercle est de 20 lieues marines, c'est-à-dire, de 20 lieues de 2853 toises chacune ; ainsi si l'on s'avance sur l'équateur, à chaque 20 lieues on change d'un degré en longitude ; et si l'on marche sur un même méridien, à chaque 20 lieues on change d'un degré en latitude. Mais si l'on marche sur un parallèle à l'équateur, il est évident qu'à chaque 20 lieues on change de plus d'un degré en longitude, et d'autant plus que le parallèle sur lequel on s'avance est plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire, est par une plus grande latitude. Pour trouver à combien de degrés de longitude répond un certain nombre de lieues HL, parcourues sur un parallèle connu, il faut faire cette proportion : *Le cosinus de la latitude est au rayon, comme le nombre de lieues parcourues sur le parallèle, est à un quatrième terme* qui sera le nombre de lieues de l'arc correspondant BE de l'équateur qui marque le changement en longitude. C'est une suite immédiate de ce qui a été dit (329). Par exemple, supposant que par la latitude de 47° 20′, on ait couru 18 lieues sur un parallèle à l'équateur, si l'on demande combien on a changé en longitude, on fera cette proportion *cos.* 47° 20′ ou *sin.* 42° 40′ : R : : 18l est à un quatrième terme qu'on trouvera de 26l, 56 ; lesquelles étant divisées par 20, à raison de 20 lieues par degré, donnent 1° 328 ou 1° 19′ 41″ à peu près, pour le changement en longitude.

Revenons aux propriétés de la sphère.

331. Supposons, que AFIG, BFHG (*Fig.* 167) sont deux grands cercles de la sphère ; et ABDEIH, un troisième grand cercle qui coupe perpendiculairement ces deux-là, il suit de ce qui a été dit (326), que le cercle ABDEIH passe par les pôles des deux cercles AFIG, BFHG ; soient D et E ces pôles, et DK, EL les deux axes ; puisque les angles ACD, BCE sont droits, si de chacun on retranche l'angle commun BCD, les angles restans ACB, DCE seront égaux, et par conséquent aussi les arcs AB, DE ; donc *l'arc* DF *qui mesure la plus courte distance des pôles de deux grands cercles, est égal à l'arc* AB *qui mesure le plus petit des deux angles que l'un de ces cercles fait avec l'autre.*

Propriété des Triangles sphériques.

332. Il est évident que par deux points pris sur la surface d'une sphère, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle. Car ce grand cercle est l'intersection de la sphère, par un plan qui est assujetti à passer par le centre ; or il est évident que par trois points donnés on ne peut faire passer qn'un seul plan.

333. Quoiqu'un triangle sphérique puisse avoir quelques-unes de ses parties de plus de 180°, néanmoins nous ne considérerons que ceux dont chacune des parties est moindre que 180° ; parce qu'on peut toujours connoître l'un de ces triangles par l'autre. Par exemple, si l'on se représente le triangle ABEMV (*Fig.* 166) formé par les arcs quelconques AB, AV, et par l'arc BMV de plus de 180° ; en imaginant le cercle entier

entier BMVB, on pourra substituer le triangle BOVA dont l'arc BOV est moindre que 180°, au triangle ABEMV; parce que les parties du premier sont ou égales à celles du second, ou leur supplément à 180° ou à 360°, en sorte que l'un de ces triangles est connu par l'autre.

334. *Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres.*

Cela est évident.

335. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que 360°.*

Car il est évident (334) que FG est plus petit que $AG + AF$; or $AG + AF$ ajoutés avec $DG+DF$ ne font que 360°; donc $AG+AF$ ajoutés avec FG, feront moins que 360°.

336. *Soit* ABC (Fig. 168) *un triangle sphérique quelconque;* DEF *un autre triangle sphérique tel que le point* A *soit le pôle de l'arc* EF; *le point* C, *le pôle de l'arc* DE; *et le point* B, *le pôle de l'arc* DF; *chaque côté du triangle* DEF *sera supplément de l'angle qui lui est opposé dans le triangle* ABC, *et chaque angle de ce même triangle* DEF *sera supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle* ABC.

Car puisque le point A est le pôle de l'arc EF, le point E doit être éloigné du point A de 90° (325); par la même raison, puisque C est le pôle de l'arc DE, le point E doit être à 90° du point C; donc (325) le point E est le pôle de l'arc AC; on prouvera de même que D est le pôle de BC, et F le pôle de AB.

Cela posé, prolongeons les arcs AC, AB jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'arc EF en G et H. Puisque le point E est pôle de ACG, l'arc

EG est de 90°; et puisque F est pôle de ABH; l'arc FH est de 90°, donc $EG+FH$ ou EG $+FG+GH$ ou $EF+GH$ est de 180°; or GH est la mesure de l'angle A (328), puisque les arcs AG, AH sont de 90°; donc $EF+A$ est de 180°; donc EF est supplément de l'angle A. On prouvera de la même manière, que DE est supplément de C, et DF supplément de B.

Prolongeons l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre DF en I. Les deux arcs AH et BI sont chacun de 90°, puisque A et B sont les pôles des arcs EF, DF; donc $AH+BI$ ou $AH+AB+AI$ ou $HI+AB$ est de 180°; mais HI est la mesure de l'angle F (328) puisque le point F est pôle de HI; donc F + AB est de 180°; donc F est supplément de AB. On prouvera de même que E est supplément de AC, et D supplément de BC.

337. Concluons de là que *la somme des trois angles d'un triangle sphérique, vaut toujours moins que 540°, ou que 3 fois 180°, et plus que 180°.*

Car la somme des trois angles A, B, C, avec la somme des trois côtés EF, DF, DE, vaut 3 fois 180° (336); donc, 1.° la somme des trois angles A, B, C, est moindre que 3 fois 180° ou que 540°. 2.° La somme des trois côtés EF, DF, DE est (335) moindre que 360°, ou deux fois 180°; donc il reste plus de 180° pour la somme des trois angles A, B, C.

338. *Un triangle sphérique peut donc avoir ses trois angles droits, et même ses trois angles obtus.*

On voit donc que la somme des trois angles d'un triangle sphérique, n'est pas une quantité qui soit toujours la même, comme dans les triangles rectilignes; et par conséquent, on ne

peut pas, de deux angles connus, conclure le troisième.

339. Comme les parties du triangle *DEF* sont, chacune, supplément de celle qui lui est opposée dans le triangle *ABC*, il s'ensuit que l'un de ces triangles peut être résolu par l'autre, puisque connoissant les parties de l'un, on a celles de l'autre. Nous ferons usage de cette remarque; et comme les deux triangles *ABC*, *DEF* reviendront souvent, nous nommerons le triangle *DEF*, *triangle supplémentaire*, pour abréger le discours.

340. *Deux triangles sphériques tracés sur une même sphère, ou sur des sphères égales, sont égaux*, 1.° *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.* 2.° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.* 3.° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.* 4.° *Lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Les trois premiers cas se démontrent précisément de la même manière que pour les triangles rectilignes; *voyez* (80, 81 et 83).

A l'égard du quatrième, comme il n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, il exige une démonstration à part; la voici.

Concevez que pour chacun des deux triangles *ABC* et *abc* (*fig.* 168 *et* 169) on ait tracé le triangle supplémentaire *DEF* et *def*. Si les angles *A*, *B*, *C* sont égaux aux angles *a*, *b*, *c* chacun à chacun, les côtés *EF*, *DF*, *DE* suppléments des premiers angles, seront donc égaux aux côtés *ef*, *df*, *de* suppléments des derniers; donc par le troisième des quatre cas qu'on

vient d'énoncer, ces deux triangles *DEF* et *def* seront parfaitement égaux; donc les angles *D*, *E*, *F*, seront égaux aux angles *d*, *e*, *f*, chacun à chacun; donc les côtés *BC*, *AC*, *AB*, supplémens de ces trois premiers angles, seront égaux aux côtés *bc*, *ac*, *ab* supplémens des trois derniers.

341. *Dans un triangle sphérique isoscele, les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et réciproquement si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés, sont aussi égaux.*

Prenez sur les côtés égaux *AB*, *AC*, (*fig.* 170) les arcs égaux *AD*, *AE*; et concevez les arcs de grand cercle *DC*, *BE*; les deux triangles *ADC*, *AEB* qui ont alors un angle commun compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, seront égaux (340). Donc l'arc *BE* est égal à l'arc *CD*; donc les deux triangles *BDC* et *BEC* sont égaux, puisqu'outre *DC* égal à *BE*, comme on vient de le voir, ils ont de plus le côté *BC* commun, et que d'ailleurs les parties *BD*, *CB* sont égales, puisque ce sont les restes de deux arcs égaux *AB*, *AC* dont on a retranché des arcs égaux *AD*, *AE*. De ce que ces deux triangles sont égaux, on peut donc conclure que l'angle *DBC* ou *ABC* est égal à l'angle *ECB* ou *ACB*.

Quant à la seconde partie de la proposition; elle est une suite de la première, en imaginant le triangle supplémentaire; car si les deux angles *B* et *C* (*Fig.* 168) sont égaux, leurs supplémens *DF*, *DE* seront égaux; le triangle *DEF* sera donc isoscele; donc les angles *E* et *F* seront égaux; donc leurs supplémens *AC* et *AB* seront égaux.

342. *Dans tout triangle sphérique* ABC (Fig. 171), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement.*

Si l'angle B est plus grand que l'angle A, on pourra conduire en dedans du triangle un arc BD de grand cercle, qui fasse l'angle ABD égal à l'angle BAD, et alors BD sera égal à AD (341); or $BD+DC$ est plus grand que BC, donc aussi $AD+DC$ ou AC est plus grand que BC.

La réciproque se démontrera facilement et d'une manière analogue, en employant le triangle supplémentaire.

Les dernières propositions que nous venons d'établir, sont utiles pour se diriger dans la résolution des triangles sphériques, où tout ce que l'on cherche, se détermine par des sinus ou des tangentes, qui appartenant indifféremment à des arcs plus petits que 90°, ou à leurs supplémens, peuvent souvent laisser dans l'incertitude sur celui de ces deux arcs qu'on doit adopter; mais ces connoissances ne sont pas suffisantes pour découvrir dans quels cas ce que l'on cherche doit être plus grand ou plus petit que 90°, et dans quels cas il peut être indifféremment plus grand ou plus petit.

Moyens de reconnoître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les Triangles sphériques Rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

343. Quoique deux angles et même les trois angles d'un triangle sphérique rectangle puissent être droits, et que par conséquent, il puisse y avoir deux ou trois hypothénuses, néanmoins

nous n'appellerons *hypothénuse*, que le côté opposé à l'angle droit que nous considérerons; et nous appellerons les deux autres angles, *angles obliques*.

344. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle, est de même espèce que le côté qui lui est opposé; c'est-à-dire, qu'il est de 90°, si ce côté est de 90°; et plus grand ou plus petit que 90°, selon que ce côté est plus grand ou plus petit que 90°.*

Que *BC* (*fig.* 172) soit l'angle droit; si *BC* est moindre que 90°, en le prolongeant jusqu'en *D*, de manière que *BD* soit de 90°, le point *D* sera le pôle de l'arc *AB* (326); donc l'arc de grand cercle *DA*, conduit à l'extrémité du côté *BA*, sera perpendiculaire sur *BA*, donc l'angle *DAB* sera droit; donc *CAB* est moindre que 90°. On prouvera, d'une manière semblable, les deux autres cas.

345. *Si les deux côtés, ou les deux angles d'un triangle sphérique rectangle sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuse sera toujours plus petite que 90°; et au contraire, elle sera plus grande que 90°, si les deux côtés, ou les deux angles sont de différente espèce.*

Car, en supposant la même construction que dans la proposition précédente, si *AB* est aussi moindre que 90°, l'angle *ADB* qui doit (344) être de même espèce que le côté *AB*, sera moindre que 90°; par la même raison, l'angle *ACB* sera moindre que 90°; donc *ACD* sera obtus, et par conséquent plus grand que *ADC*; donc *AD* sera plus grand que *AC* (342); or *AD* est de 90°, donc *AC* est moindre que 90°.

Pareillement si les deux côtés *BC* et *AB* de

l'angle droit *B* (*Fig.* 173), sont tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuse *AC* sera encore plus petite que 90°; car si l'on prend *BD* de 90°, *D* étant le pôle de l'arc *AB*, D*A* sera de 90°; or puisque *AB* est de plus de 90°, l'angle *ACB* sera obtus (344); il en sera de même, et par la même raison, de l'angle *ADB*; donc *A*D*C* est aigu, et par conséquent plus petit que *AC*D; donc aussi *AC* sera plus petit que *A*D (342); c'est-à-dire, moindre que 90°.

Au contraire, si *AB* (*Fig.* 174) est moindre que 90°, et *BC* plus grand; alors l'angle *ACB* qui est de même espèce que *AB* (344), sera aigu; il en sera de même de l'angle *ADB*; donc *A*D*C* sera obtus, et par conséquent plus grand que *AC*D; donc *AC* sera plus grand que *A*D, c'est-à-dire, plus grand que 90°.

Quant aux angles comparés à l'hypothénuse, la vérité de cette proposition suit de ce que ces angles sont, chacun, de même espèce que le côté qui lui est opposé (344).

346. Donc, 1.° *Selon que l'hypothénuse sera plus petite ou plus grande que* 90°, *les côtés seront de même ou de différente espèce entr'eux; et il en sera de même des angles obliques.*

347. 2.° *Selon que l'hypothénuse et un côté seront de même ou de différente espèce, l'autre côté sera plus petit ou plus grand que* 90°, *et il en sera de même de l'angle opposé à ce dernier côté.*

Principes pour la Résolution des Triangles Sphériques rectangles.

348. La résolution des triangles sphériques rectangles ne dépend que de trois principes que nous allons exposer successivement, et que nous éclaircirons ensuite par des exemples. Le premier de ces principes est commun aux triangles rectangles et aux triangles obliquangles.

Chaque cas des triangles sphériques rectangles peut être résolu par une seule proportion, que l'on trouvera toujours par l'un ou l'autre des trois principes suivans.

349. *Dans tout triangle sphérique* ABC (Fig. 175), *on a toujours cette proportion : Le sinus d'un des angles, est au sinus du côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle, est au sinus du côté opposé à celui-ci.*

Soit H le centre de la sphère, BH, AH, CH trois rayons : du sommet de l'angle A abaissons sur le plan du côté opposé BC la perpendiculaire AD, et par cette ligne conduisons deux plans ADE, ADF, de manière que les rayons BH, CH leur soient perpendiculaires respectivement ; les lignes AE, DE, sections des deux plans ABH, CBH, avec le plan ADE, seront perpendiculaires sur l'intersection commune BH de ces deux plans, et par conséquent, l'angle AED sera l'inclinaison de ces deux plans (191) ; donc il sera égal à l'angle sphérique ABC (320) ; par la même raison l'angle AFD sera égal à l'angle sphérique ACB.

Cela posé, les deux triangles ADE, ADF étant rectangles en D, on aura (295)

$R : sin.\ AED :: AE : AD$
et $sin.\ AFD : R :: AD : AF$

donc (100) $sinus\ AFD : sin.\ AED :: AE : AF$.

Or les lignes AE, AF étant des perpendiculaires abaissées de l'extrémité A des arcs AB, AC, sur les rayons BH, CH qui passent par l'autre extrémité de ces arcs, sont (269) les sinus de ces mêmes arcs ; donc et à cause que les angles AED et AFD sont égaux aux angles B et C, on a enfin $sin.\ C : sin.\ B :: sin.\ AB : sin.\ AC$.

On démontreroit de la même manière, que $sin.\ C : sin.\ A :: sin.\ AB : sin.\ BC$.

350. Si l'un des angles comparés, est droit ; comme son sinus est alors égal au rayon (274), la proportion peut être énoncée ainsi : *Le rayon, est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles obliques, est au sinus du côté opposé.*

351. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté, est à la tangente du côté opposé.*

Soit B (*Fig.* 176) l'angle droit : de l'extrémité C du côté BC, menons CI perpendiculaire sur le rayon BD de la sphère ; et par cette droite CI, conduisons le plan CIE de manière que le rayon DA lui soit perpendiculaire. Alors l'angle IEC sera égal à l'angle sphérique A : et puisque les deux plans DBC, DBA sont supposés perpendiculaires entr'eux, la ligne CI perpendiculaire à leur commune section DB, sera (185) perpendiculaire au plan DBA, et par conséquent (178) à la droite IE.

Cela posé, dans le triangle rectangle *DIC*; on a (296) *DI* : *CI* :: *R* : *tang. IDC*, et dans le triangle rectangle *EIC*, on a, par le même principe,

CI : *IE* : : *tang. IEC* : *R*.

donc (100) *DI* : *IE* :: *tang. IEC* : *tang. IDC* ou :: *tang. A* : *tang. BC*, puisque l'angle *IDC* a pour mesure l'arc *BC*. Or dans le triangle rectangle *IED* on a (295) *DI* : *IE* : : *R* : *sin. IDE* ou *sin. AB*; donc à cause du rapport commun de *DI* à *IE*, on aura *R* : *sin. AB* : : *tang. A* : *tang. BC*.

352. *Dans tout triangle sphérique rectangle* ABC (Fig. 177), *si l'on prolonge les deux côtés* BC, AC *d'un des angles obliques, jusqu'en* D *et* E, *de manière que* DB, AE *soient chacun de* 90°, *et qu'on joigne les extrémités* D *et* E *par un arc de grand cercle* DE; *on aura un nouveau triangle* CED *rectangle en* E, *dont les parties seront, ou égales à celles du triangle* ABC, *ou leur complément.*

Imaginons les côtés *AB* et *DE* prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en *F*; puisque *BD* est de 90° et perpendiculaire sur *AB*, le point *D* est le pôle de l'arc *AB* (326); donc *DF* est de 90°, et perpendiculaire sur *AF*; par la même raison, *DA* est de 90°.

Puisqu'on a fait *AE* de 90°, et que *DA* est aussi de 90°, le point *A* est le pôle de *DF* (325); donc *AE* est perpendiculaire sur *DE*, et par conséquent le triangle *CED* est rectangle en *E*.

Cela posé, il est évident que l'angle *E* est égal à l'angle *B*; et que l'angle *DCE* est égal à l'angle *ACB* (321); que le côté *DC* est

complément de *CB*; que *DE* complément de *EF*, qui (328) est la mesure de l'angle *CAB*, est complément de cet angle *CAB*; que *CE* est complément de *AC*; et que l'angle *D* qui (328) a pour mesure *BF* complément de *AB*, est complément de *AB*; donc, en effet, les parties du triangle *DCE* sont, ou égales aux parties du triangle *ACB*, ou leur complément.

On démontreroit la même chose du triangle *AHI* qu'on formeroit, en prolongeant de même au-dessus de *A* les côtés *BA* et *AC* de l'angle oblique *BAC*, jusqu'à ce qu'ils fussent de 90° chacun.

353. On voit donc que dès qu'on connoît trois choses dans le triangle *ABC*, on connoît aussi trois choses dans chacun des deux triangles *CED*, *AHI*. On voit en même temps, que les trois autres parties qui resteroient à trouver dans le triangle *ABC*, feroient connoître les trois autres parties de chacun de ces deux triangles *CED*, *AHI*, et réciproquement.

Donc, lorsqu'ayant à résoudre le triangle *ABC*, on ne pourra faire usage immédiatement, ni de l'un, ni de l'autre des deux principes posés (349 et 351) on aura recours à l'un ou à l'autre des deux triangles *CED*, *AHI*; et alors l'application de l'un ou de l'autre de ces deux principes, aura lieu, et fera connoître les parties de ces triangles, qui donneront ensuite la connoissance des parties du triangle *ABC*, par le principe qu'on vient de poser en dernier lieu. Nous nommerons dorénavant les triangles *CED*, *AHI*, *triangles complémentaires*.

Si les côtés *AB*, *AC*, ou *AC*, *BC* que la proposition démontrée (352) suppose tous deux plus petits que 90°, étoient tous deux plus

grands, ou l'un plus grand et l'autre plus petit que 90°, comme il arrive dans le triangle *FBC* (*Fig.* 178); au lieu de calculer ce triangle *FBC*, on calculeroit le triangle *ABC* formé par les arcs *FC*, *FB* prolongés jusqu'à 180°; les parties de celui-ci étant connues, feroient connoître celles du triangle FBC. Au reste, il n'est pas indispensable d'avoir recours à cet expédient; la proportion que donnera la figure 177, a toujours lieu, soit que les parties du triangle soient plus petites que 90°, soit qu'elles soient plus grandes.

Remarquons, à l'égard des triangles sphériques rectangles, comme nous l'avons fait pour tous les triangles rectilignes rectangles, que l'angle droit étant un angle connu, il suffit, pour être en état de résoudre un triangle rectangle, de connoître deux choses outre l'angle droit. Passons aux exemples.

EXEMPLE I. Supposons le côté BC (*Fig.* 177) de 15° 17′, l'angle *A* de 23° 42′; on demande l'hypothénuse AC.

Pour trouver l'hypothénuse, on peut faire immédiatement usage du principe donné (349), en faisant cette proportion, *sin. A* : *sin.* BC : : *R* : *sin.* AC, qui n'est autre chose que la proportion énoncée (350), mais dont on a transposé les deux rapports. Cette proportion, dans le cas présent, revient à *sin.* 23° 52′ : *sin.* 15° 17′ : : *R* : *sin.* AC.

Opérant par logarithmes, on a. . . . .

Log. sin. 15° 17′	9,4209330
Log. du Rayon	10. . . . .
Complément arithmétique du log. sin. 23°42′. .	0,3958304
Somme ou *log.* du *sin. AC*	x9,8167634

Qui, dans les Tables, répond à 40° 59′; en sorte que l'hypothénuse AC est de 40° 59′, si elle doit être moindre que 90°; ou bien elle est de 139° 1′, supplément de 40° 59′, si elle doit être plus grande que 90°; car rien, ici, ne détermine si l'hypothénuse AC est moindre ou plus grande que 90°; et ces deux solutions sont également possibles, comme il est aisé de s'en convaincre, par la *figure* 178 dans laquelle les deux triangles ABC, ADE peuvent, avec le même angle *A*, avoir le côté BC égal au côté DE, et les hypothénuses AC, AE différentes; mais en prolongeant AC, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F, on voit que AE est supplément de AC, parce qu'il est supplément de FE qui est égal à AC, lorsque DE est égal à BC.

EXEMPLE II. Pour avoir le côté AB du même triangle ABC (*fig.* 177) on peut appliquer directement la proposition enseignée (351), qui fournit cette proportion *R* : *sin. AB* : : *tang. AB* : *tang. BC*, ou *tang. A* : *tang. BC* : : *R* : *sin. AB*, c'est-à-dire, *tang.* 23° 42′ : *tang.* 15° 17′ : : *R* : *sin. AB*. Opérant par logarithmes, on aura

Log. tang. 15° 17′	9,4365704
Log. du Rayon	10......
Complément arithmétique du log. tang. 23° 42′.	0,3575658
Somme *ou log. sin. AB*	*x*9,7941362

Qui, dans les Tables, répond à 38° 30′; en sorte que le côté *A B* est de 38° 30′, ou 141° 80′, selon qu'il doit être plus petit ou plus grand que 90°, c'est-à-dire, (*fig.* 178), selon qu'il doit appartenir au triangle *ABC* ou au triangle *ADE*.

EXEMPLE III. L'angle droit, l'angle *A* et le côté BC étant toujours les seules choses connues, pour trouver l'angle C du même triangle (*fig.* 177), je remarque que je ne puis appliquer aucune des deux analogies enseignées (349 *et* 351), parce que je n'aurois que deux termes de connus, soit dans l'une, soit dans l'autre; c'est pourquoi j'ai recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel le côté DE complément de l'angle *A* de 23° 42′, sera de 66° 18′; le côté ou l'hypothénuse DC complément de BC ou de 15° 17′, sera de 74° 43′, et l'angle DCE est égal à l'angle ACB qu'il s'agit de trouver; or dans ce triangle DCE, je puis appliquer le principe donné (360), en disant *sin. DC* : *R* : : *sin. DE* : *sin. DCE*; c'est-à-dire, *sin.* 74° 43′ : *R* : : *sin.* 66° 18′ : *sin. DCE*.

Opérant par logarithmes :

Log. sin. 66° 18′........................	9,9617355
Log. du Rayon........................	10........
Complément arithmétique du log. sin. 74° 43′..	0,0156374
Somme ou *log. sin. DCE*................	19,9773729

Qui, dans les Tables, répond à 71° 40′; donc l'angle DCE, et par conséquent l'angle demandé ACB est de 71° 40′ ou de 108° 20′, supplément de 71° 40′; car puisque rien ne détermine ici, si le triangle ACB est tel que le triangle ACB de la *Figure* 178, ou tel que le triangle AED de la même *Figure*, il demeure incertain, si l'on doit prendre l'angle ACB ou l'angle AED qui en est le supplément.

EXEMPLE IV. Que le côté AB du triangle ABC

(*Fig.* 177) soit de 48° 51′; et le côté BC, de 37° 45′; si l'on veut avoir l'hypothénuse AC, on aura recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel on connoît alors l'hypothénuse DC complément de BC ou de 37° 45′, et qui sera, par conséquent, de 52° 15′; on connoît aussi l'angle D qui a pour mesure BF complément de AB ou de 48° 51′, et qui sera, par conséquent, de 41° 9′; et pour avoir l'hypothénuse AC, il n'y aura qu'à calculer le côté CE, qui étant son complément, la fera connoître. Or dans le triangle DCE, pour avoir CE, on fera cette proportion (350) R : *sin.* DC : : *sin.* D : *sin.* CE, c'est-à-dire, R : *sin.* 52° 15′ : : *sin.* 41° 9′ : *sin.* CE. Opérant par logarithmes, on aura. . . . .

Log. sin. 41° 9′	9,8182474
Log. sin. 52° 15′.	9,8980060
Somme.	19,7162534
Log. du Rayon.	10. . . . . .
Reste ou *log. sin.* CE.	9,7162534

Qui, dans les Tables, répond à 31° 21′; donc AC qui en est le complément, ne peut être que 58° 39′; car les deux côtés AB, BC étant de même espèce, l'hypothénuse doit (345) être moindre que 90°.

EXEMPLE V. Les mêmes choses étant données; pour trouver l'angle C ou l'angle A, on appliquera directement la proposition (351) qui pour l'angle A donne R : *sin.* AB : : *tang.* A : *tang.* BC, ou *sin.* AB : R : : *tang.* BC : *tang.* A, c'est-à-dire, *sin.* 48° 51′ : R : : *tang.* 37° 45′ : *tang.* A. Et par la même raison, on aura pour

Table pour la résolution de tous les cas possibles des Triangles Sphériques Rectangles (a).

Etant donnés.	*Trouver.*	*Proportion à faire.*	*Cas où ce que l'on cherche doit être moindre que 90°.*
AB, AC	C	*Sin.* AC : R : : *sin.* AB : *sin.* C	Si AB est moindre que 90°.
	A	*Cot.* AB : *cot.* AC : : R : *cos.* A	Si AB et AC sont de même espèce.
	BC	*Cos.* AB : *cos.* AC : : R : *cos.* BC	Si AB et AC sont de même espèce.
AB, BC	A	*Sin.* AB : R : : *tang.* BC : *tang.* A	Si BC est moindre que 90°.
	C	*Sin.* BC : R : : *tang.* AB : *tang.* C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : *cos.* BC : : *cos.* AB : *cos.* AC	Si AB et BC sont de même espèce.
AB, A	C	R : *cos.* AB : : *sin.* A : *cos.* C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : *cos.* A : : *cot.* AB : *cot.* AC	Si AB et A sont de même espèce.
	BC	R : *sin.* AB : *tang.* A : *tang.* BC	Si A est moindre que 90°.
AB, C	A	*Cos.* AB : R : : *cos.* C : *sin.* A	Douteux.
	AC	*Sin.* C : *sin.* AB : : R : *sin.* AC	Douteux.
	BC	*Tang.* C : *tang.* AB : : R : *sin.* BC	Douteux.
BC, AC	A	*Sin.* AC : R : : *sin.* BC : *sin.* A	Si BC est moindre que 90°.
	C	*Cot.* BC : *cot.* AC : : R : *cos.* C	Si AC et BC sont de même espèce.
	AB	*Cos.* BC : *cos.* AC : : R : *cos.* AB	Si AC et BC sont de même espèce.
BC, A	C	*Cos.* BC : R : : *cos.* A : *sin.* C	Douteux.
	AC	*Sin.* A : *sin.* BC : : R : *sin* AC	Douteux.
	AB	*Tang.* A : *tang.* BC : : *tang.* R : *sin.* AB	Douteux.
BC, C	A	R : *cos.* BC : : *sin.* C : *cos.* A	Si BC est moindre que 90°.
	AC	R : *cos.* C : : *cot.* BC : *tang.* AB	Si BC et C sont de même espèce.
	AB	R : *sin.* BC : : *tang.* C : *tang.* AB	Si C est moindre que 90°.
AC, A	C	*Cos.* AC : R : : *cot.* A : *tang.* C	Si AC et A sont de même espece.
	AB	*Cos.* A : R : : *cot.* AC : *cot.* AB	Si AC et A sont de même espèce.
	BC	R : *sin.* AC : : *sin* A : *sin.* BC	Si A est moindre que 90°.
AC, A	A	R : *cos.* AC : : *tang.* C : *cot.* A	Si AC et C sont de même espèce.
	AB	R : *sin.* AC : : *sin.* C : *sin.* AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	*Cos.* C : R : : *cot.* AC : *cot.* BC	Si AC et C sont de même espèce.
A, C	AC	*Tang.* C : *cot.* A : : R : *cos.* AC	Si A et C sont de même espèce.
	AB	*Sin.* A : *cos.* C : : R : *cos.* AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	*Sin.* C : *cos.* A : : R : *cos.* BC	Si A est moindre que 90°.

(a) Cette Table se rapporte au triangle *ABC* de la *Figure* 177, dans laquelle *A* est l'angle droit.

logies. Ces cas exigent qu'on abaisse, de l'un des angles du triangle proposé, un arc de grand cercle, perpendiculairement sur le côté opposé. Comme cet arc peut tomber ou sur le côté même, ou sur le prolongement de ce côté, selon les différens rapports de grandeur des côtés et des angles, il convient, avant d'établir les principes de la résolution de ces sortes de triangles, de faire distinguer les cas où l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle, de ceux où il tombe au dehors.

355. *L'arc de grand cercle* AD (Fig. 180) *abaissé perpendiculairement de l'angle* A *d'un triangle sphérique, sur le côté opposé, tombe dans le triangle quand les deux autres angles* B *et* C *sont de même espèce; et au dehors quand ils sont de différente espèce.*

Car dans les triangles rectangles ADC, ADB (*Fig.* 180) les deux angles B et C doivent être chacun de même espèce que le côté opposé AD (344); donc ils doivent être de même espèce entr'eux.

Dans les triangles rectangles ADC, ADE de la *Fig.* 181, les angles ACD, ABD doivent être de même espèce chacun que le côté opposé AD; donc puisque ABC est supplément de ABD, ABC et ACD doivent être de différente espèce.

Principes pour la Résolution des Triangles Sphériques Obliquangles.

356. La résolution de tous les cas possibles des triangles sphériques obliquangles, porte sur cinq principes que nous allons faire connoître, et sur la résolution des triangles rectangles; tous ces principes ne sont pas nécessaires à la fois

pour chaque cas, mais ils le sont pour être en état de les résoudre tous.

De ces cinq principes, nous en avons déja établi deux ; ce sont ceux qui sont énoncés aux numéros 336 et 349 ; voici les trois autres.

357. *Dans tout triangle sphérique* ABC (Fig. 179), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc de grand cercle* AD *perpendiculairement sur le côté opposé* BC, *on aura toujours cette proportion : Le cosinus du segment* BD, *est au cosinus du segment* CD, *comme le cosinus du côté* AB, *est au cosinus du côté* AC.

Soit G le centre de la sphère : du sommet de l'angle A abaissons sur le plan BGC de l'arc BC, la perpendiculaire AI ; elle sera dans le plan AGD de l'arc AD. Conduisons par AI les deux plans AI, AIF, de manière que les rayons GB, GC leur soient respectivement perpendiculaires ; et du point D, menons les perpendiculaires DH, DK sur les mêmes rayons.

Les triangles GIE, GDH seront semblables, à cause des lignes IE, DH perpendiculaires sur GB ; par une raison semblable, les triangles GDK, GIF sont semblables. On a donc ces deux proportions GH : GE : : GD : GI.
et GK : GF : : GD : GI.

Donc, à cause du rapport commun de GD à GI, on a GH : GE : : GK : GE. Or GH est le cosinus de BD (270) ; GE, le cosinus de AB ; GK, le cosinus de CD ; et GF, celui de AC ; donc *cos.* BD : *cos.* AB : : *cos.* CD : *cos.* AC, ou en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième.
cos. BD : *cos.* CD : : *cos.* AB : *cos.* AC.

358. *Les mêmes choses étant supposées que dans la proposition précédente, on a cette autre proportion : Le sinus de* BD, *est au sinus de* CD,

comme la cotangente de l'angle B, *est à la cotangente de l'angle* C.

Car les angles AEI, AFI sont égaux aux angles B et C chacun à chacun, ainsi que nous l'avons vu dans la démonstration du n° 349 : donc, puisque les triangles AIE, AIF sont rectangles, les angles EAI, FAI sont compléments des angles AEI, AFI, et par conséquent des angles B et C.

Cela posé, dans le triangle AEI, on a (296) R : *tang.* EAI ou *cot.* B : : AI : IE; et dans le triangle rectangle A I F, on a tang. A I F ou *cot.* C : R : : IF : AI; donc (100) *cot.* C : *cot.*B : : IF : IE;

Mais les triangles semblables GFI, GKD, et les triangles semblables GFI, GHD donnent.

IF : DK : : GI : GD
et IE : DH : : GI : GD
Donc, I F : D K : : I E : D H
ou I F : I E : : D K : D H

Donc aussi *cot.* C : *cot.* B : : DK : DH : or DK et DH sont les sinus des segmens D C et DB; donc enfin *cot.* C : *cot.* B : : *sin.* DC : *sin.* DB.

359. *Dans tout triangle sphérique* ABC (Fig. 180) *si d'un angle* A *on abaisse l'arc perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC, *on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté* BC *est à la tangente de la moitié de la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de leur différence, est à la tangente de la moitié de la différence des deux segmens* CD, BD, *ou* (Fig. 181) *à la tangente de la moitié de leur somme.*

On vient de voir (357) que *cos.* AB : *cos.* AC : : *cos.* BD : *cos.* CD; donc (98) *cos.* AB + *cos.* AC : *cos.* AB — *cos.* AC : : *cos.* BD + *cos.* CD :

cos. BD — *cos.* CD ; *mais* (287) *cos.* AB + *cos.* AC : *cos.* AB — *cos.* AC :: *cot.* $\frac{\angle C + \angle B}{2}$: *tang.* $\frac{\angle C - \angle B}{2}$; et par la même raison, *cos.* BD + *cos.* CD : *cos.* BD — *cos.* CD : : *cot.* $\frac{CD+BD}{2}$: *tang.* $\frac{CD-BD}{2}$; donc *cot.* $\frac{\angle C+\angle B}{2}$: *tang.* $\frac{\angle C-\angle B}{2}$ :: *cot.* $\frac{CD-BD}{2}$: *tang.* $\frac{CD+BD}{2}$, ou *cot.* $\frac{\angle C+\angle B}{2}$: *cot.* $\frac{CD+BD}{2}$ :: *tang.* $\frac{AC-AB}{2}$: *tang.* $\frac{CD-BD}{2}$, ou à cause que (280) les cotangentes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes, *tang.* $\frac{CD+BD}{2}$: *tang.* $\frac{AC+AB}{2}$ :: *tang.* $\frac{AC-AB}{2}$: *tang.* $\frac{CD-BD}{2}$. Or dans la Figure 180, $CD + BD$ est BC ; est dans la Figure 181, $CD - BD$ est BC ; donc, pour la Figure 180, on a *tang.* $\frac{BC}{2}$: *tang.* $\frac{AC+AB}{2}$: : *tang.* $\frac{AC-AB}{2}$: *tang.* $\frac{CD-BD}{2}$; et pour la Figure 181, on a *tang.* $\frac{CD+BD}{2}$: *tang.* $\frac{AC+AB}{2}$ :: *tang.* $\frac{AC-AB}{2}$: *tang.* $\frac{BC}{2}$, ou *tang.* $\frac{BC}{2}$: *tang.* $\frac{AC+AB}{2}$: : *tang.* $\frac{ACA-B}{2}$: *tang.* $\frac{CD+BD}{2}$.

Résolution des Triangles Sphériques Obliquangles.

360. Les principes que nous venons d'exposer, et la seconde proportion de la Table que nous avons donnée pour les triangles rectangles, suffisent pour la résolution des triangles sphériques obliquangles, ou du moins, pour déterminer les sinus ou les tangentes des différentes parties qui les composent ; il y a plusieurs cas

où trois choses données suffisent pour déterminer tout le reste, mais il y en a plusieurs aussi, où la question reste indéterminée, parce que ces données ne sont pas suffisantes pour décider si la chose cherchée est moindre ou plus grande que 90°. Cependant, quoiqu'à envisager la chose généralement, le nombre de ces derniers cas soit assez considérable, il est très-rare, dans les usages ordinaires de la Trigonométrie sphérique, qu'on ne sache pas de quelle espèce doit être le côté ou l'angle qu'on demande.

Avant que d'entrer en matière, rappellons-nous que le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle ou d'un arc, sont les mêmes pour cet angle ou cet arc, que pour son supplément.

361. On peut réduire le calcul des triangles obliquangles, aux six cas que nous allons d'abord résoudre : et nous en déduirons ensuite la résolution des autres.

QUESTION I. *Etant donnés deux côtés* A B, AC *et un angle opposé B* (Fig. 180), *trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.*

Faites cette proportion (349) *sin.* A C : *sin.* AB : : *sin.* B : *sin.* C. L'angle *C* peut être de plus ou de moins de 90°.

QUESTION II. *Etant donnés deux côtés* AB, A C (Fig. 180) *et un angle opposé* B, *trouver le troisième côté* BC.

De l'angle *A* opposé au côté cherché, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*; et dans le triangle rectangle *ADB*, calculez le segment *BD* par cette proportion, qui revient au même que la seconde de la Table ci-dessus, *Page* 333.

$$cos.\ B : R : : cot.\ AB : cot.\ BD$$

Ou bien par cette autre. . . . .

R : cos. B : : tang. AB : tang. BD

qui revient au même, puisque (280) les tangentes sont réciproquement proportionnels aux cotangentes.

Et pour avoir le second segment *CD*, faites cette autre proportion (357) :

cos. AB : cos. AC : : cos. BD : cos. CD.

Alors, selon que *AD* tombe dans le triangle, ou hors du triangle, vous aurez *BC*, en prenant ou la somme ou la différence de *BD* et *BC*.

QUESTION III. *Etant donnés les deux angles* B *et* C (Fig. 180), *et un côté opposé* AB, *trouver le côté intercepté* BC.

De l'angle *A* opposé au côté cherché *BC*, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*, et dans le triangle rectangle *ADB*, calculez *BD* par la même proportion que dans la question II, savoir.

R : cos. B : : tang. AB : tang. BD.

Pour avoir le second segment *CD*, faites cette autre proportion (358) :

cot. B : cot. C : : sin. BD : sin. CD.

Et pour avoir *BC*, prenez la somme ou la différence de *CD* et de *BD*, selon que la perpendiculaire tombe dans le triangle, ou hors du triangle.

QUESTION IV. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (Fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver le troisième côté* AC.

De l'un *A* des deux angles inconnues, imaginez l'arc perpendiculaire *AD* sur le côté opposé *BC*. Calculez le segment *BD* par la même proportion que dans la question II.

R : cos. B : : tang. AB : tang. BD.

Retranchez *BD* du côté connu *BC* (*Fig.* 180),

ou ajoutez-le à ce côté (*Fig.* 181), et vous aurez le segment *CD*; alors pour avoir *AC*, faites cette proportion (357) *cos. BD* : *cos. CD* :: *cos. AB* : *cos. AC*.

QUESTION V. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (Fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver l'un des deux autres angles; par exemple*, *l'angle* C.

Du troisième angle *A*, abaissez l'arc perpendiculaire *AD* sur le côté opposé *BC* Calculez le segment *B D* par la même proportion que dans la question II.

R : *cos. B* : : *tang. AB* : *tang. BD*.

Retranchez *BD* du côté connu *BC* (*Fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*Fig.* 181), et vous aurez le segment *CD*; et pour avoir l'angle *C*, faites cette proportion (358) *sin. BD* : *sin. CD* :: *cot. B* : *cot. C*.

QUESTION VI. *Etant donnés les trois côtés* AB, AC, BC (Fig. 180), *trouver un angle; par exemple*, *l'angle* B.

Ayant imaginé l'arc *AD* perpendiculaire sur le côté *BC* adjacent à l'angle cherché, calculez la demi-différence des deux segmens *BD*, *DC* par cette proportion (359) $tang. \frac{BC}{2} : tang. \frac{AB+AC}{2} :: tang. \frac{AC-AB}{2} : tang. \frac{CD-BD}{2}$; ayant trouvé cette demi-différence, retranchez-la de la moitié de *B C*, et vous aurez (301) le plus petit segment *BD*. Alors, pour avoir l'angle *A*, vous ferez cette proportion, qui est toujours celle de la question II, mais que l'on a renversée :

tang. AB : *tang. BD* : : *R* : *cos. B*.

Si la perpendiculaire devoit tomber hors du triangle, la première proportion, au lieu de donner la demi-différence, donneroit la demi-

somme : c'est pourquoi il faudroit alors, pour avoir le plus petit segment *BD* (*Fig.* 181), retrancher la moitié de *BC* de cette demi-somme, parce que c'est *BC* qui est la différence des deux segmens.

On peut encore résoudre cette question par une règle semblable à celle que nous avons donnée pour un cas analogue dans les triangles rectilignes. Voici cette règle.

Prenez la moitié de la somme des trois côtés : de cette demi-somme, retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux restes.

Alors, au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des sinus de ces deux restes, et du total retranchez la somme des logarithmes des sinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché. Le reste sera le logarithme du quarré du sinus de la moitié de cet angle. Prenez la moitié de ce logarithme restant, et cherchez à quel nombre de degré, et minutes elle répond dans la Table, ce sera la moitié de l'angle demandé.

Nous démontrerons cette règle dans la troisième partie.

362. Ces six cas exposés, voici comment on peut en déduire les six autres.

QUESTION VII. *Etant donnés deux angles* F *et* G (Fig. 182) *et un côté opposé* GE, *trouver le côté* EF *opposé à l'autre angle connu* G.

Imaginez le triangle supplémentaire *ABC* ; prenant les suppléments des angles *F* et *G* et du côté *GE*, vous aurez (336) les côtés *AC*, *AB* et l'angle *B* ; si vous calculez l'angle *C* par ce qui a été dit dans la question *I*, son supplément sera le côté *EF* (336).

Au reste, ce n'est que pour conserver l'analogie avec les cas suivants, que nous donnons cette solution; car la question présente se résout immédiatement par la proposition enseignée (349), en faisant cette proportion :

sin. F : *sin. GE* : : *sin. G* : *sin. FE.*

QUESTION VIII. *Etant donnés deux angles* F *et* G (Fig. 182) *et un côté opposé* GE, *trouver le troisième angle* E.

Prenez les suppléments des trois choses données, et vous connoîtrez dans le triangle supplémentaire, *AC*, *AB* et l'angle *B*; calculez donc le côté *B C* par la question II, le supplément de ce côté sera la valeur de l'angle *E* (336).

QUESTION IX. *Etant donnés les deux côtés* EG, EF (Fig. 182) *et un angle opposé* G, *trouver l'angle* E *compris entre les deux côtés connus.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire *ABC*, vous connoîtrez l'angle *B*, l'angle *C* et le côté *AB*; il s'agira de calculer le côté *BC*, ce qui se fera par la question III. Le supplément de *BC* sera la valeur de l'angle *E* (336).

QUESTION X. *Etant donnés deux angles* G *et* E (Fig. 182) *et le côté intercepté* GE, *trouver le troisième angle* F.

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire *ABC*, vous connoîtrez *AB*, *BC*, et l'angle compris *B*; il s'agira de calculer *AC*, ce qui se fera par la question IV. Le supplément de *AC* sera l'angle demandé *F* (336).

QUESTION XI. *Etant donnés deux angles* G *et* E (Fig. 182) *et le côté intercepté* GE, *trouver l'un*

des deux autres côtés ; trouver FE, *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire *ABC*, vous connoîtrez *AE*, *BC*, et l'angle compris *B* : il s'agira de calculer l'angle *C*, ce qui se fera par la question V. Le supplément de *C* sera la valeur du côté *FE* (336).

QUESTION XII. *Etant donnés les trois angles* E, F, G (Fig. 182), *trouver l'un des côtés : le côté* EG, *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire *ABC*, vous connoîtrez les trois côtés *BC*, *AC*, *AB* ; il s'agira de calculer l'angle *B*, ce qui se fera par la question VI. Le supplément de *B* sera la valeur du côté cherché *EG* (336).

Avant de passer aux exemples, remarquons que quoique plusieurs cas des triangles obliquangles, exigent deux analogies, il y a cependant une espèce de triangles obliquangles qui peut toujours être résolue par une seule analogie ; ce sont ceux dont un côté est de 90° ; car en employant le triangle supplémentaire, ce triangle devient un triangle rectangle.

Donnons maintenant quelques exemples.

EXEMPLE de la question IV. Supposons que le point F (*Fig.* 166) marque la position de Paris sur la terre ; le point G celle de Toulon : on sait, par les Observations Astronomiques, que la latitude de Paris, ou l'arc BF est de 48° 50′ * ; que la latitude de Toulon, ou l'arc GE est de 43° 7′ ; et que la différence de longitude entre Paris et Toulon, ou l'arc BE, ou l'angle BAE ou FAG est de 30° 37′. On demande quelle est la plus courte distance de Paris à Toulon.

* Nous négligeons les secondes dans cet exemple.

Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre sur la surface d'une sphère, est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points. Imaginons l'arc FG de grand cercle. Si des arcs AB, AE de 90° chacun, nous retranchons les arcs BF, GE qui sont de 48° 50′ et 43° 7′, nous aurons les arcs AF, AG de 41° 10′ et 46° 53′. Nous connoîtrons donc, dans le triangle AFG, les deux côtés AF, AG et l'angle compris FAG; il est question de calculer le troisième côté FG.

Représentons le triangle FAG, par le triangle ABC (*Fig.* 183), et supposons AB de 41° 10′, BC de 46° 53′ et l'angle B de 3° 37′; alors, selon la règle donnée dans la question IV, je calcule le segment BD par cette proportion :

R : *cos.* 3° 37′ : : *tang.* 41° 10′ : *tang.* *BD*.

Opérant par logarithmes, j'ai. . . . .

Log. cos. 3° 37′	9,9991342
Log. tang. 41° 10′	9,9417135
Somme	19,9408477
Log. du Rayon	10. . . . . .
Reste ou *log. tang. BD*	9,9408477

Qui, dans la Table, répond à 41° 7′; retranchant 41° 7′, de BC, c'est-à-dire, de 46° 53′, nous aurons 5° 46′ pour le segment CD.

Pour trouver le côté AC, je fais, conformément à ce qui a été prescrit dans la question IV, cette proportion :

cos. 41° 7′ : *cos.* 5° 46′ : : *cos.* 41° 10′ : *cos.* AC.

Et opérant par logarithmes, j'ai. . . . .

Log. cos. 41° 10′	9,8766785
Log. cos. 5° 46′	9,9977956
Complément arithmétique du log. cos. 41° 7′. . .	0,1229904
Somme ou *log. cos. AC*	19,9974655

D'où, par les Tables, on conclud que AC est de 6° 11′, qui, à raison de 20 grandes lieues par

degré, valent 124 grandes lieues, à très-peu près; mais en lieues moyennes ou de 25 au degré, cela revient à 154 lieues, environ.

EXEMPLE de la question VI. Nous avons dit (138), en parlant de la manière de lever les plans, que nous donnerions les moyens de réduire les angles observés au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal, à ceux qu'on observeroit dans ce plan même. En voici la méthode.

Supposons que A, B, C (*Fig.* 184), soient trois points différemment élevés au-dessus du plan horizontal HE, et imaginons les perpendiculaires *Bb*, *Aa*, *Cc*, sur ce plan; on aura un triangle *abc* dont les sommets *a*, *b*, *c*, représentent les objets A, B, C de la manière dont ils doivent être représentés sur une carte.

Supposant qu'on ait pu, du point A, observer les deux points B et C, on demande ce qu'il faut faire pour déterminer l'angle *a*.

On mesurera au point A l'angle BAC et les angles B*Aa*, C*Aa*; le premier peut être mesuré sans aucune difficulté; à l'égard de chacun des deux autres, de l'angle B*Aa*, par exemple, on disposera l'instrument dans le plan vertical qu'on imagine passer par AB, et plaçant un des diamètres horizontalement, par le moyen du fil à plomb qui alors marquera la ligne *Aa*, on dirigera l'autre diamètre au point B, et on verra sur l'instrument combien il y a de degrés entre le fil à plomb et le diamètre dirigé au point B, ce qui donnera l'angle B*Aa*; on trouvera de même l'angle C*Aa*.

Cela posé, si l'on conçoit que d'un rayon quelconque AD et du point A comme centre, on ait décrit les arcs DF, DG, GF, dans les plans des angles BAC, B*Aa*, C*Aa*, on aura un triangle sphérique DGF, dans lequel on connoîtra les

côtés DF, DG, GF, mesures des angles BAC, B*Aa*, C*Aa* qu'on a observés ; l'angle DGF de ce triangle sera égal à l'angle *bac*, puisque les deux droites *ba*, *ac* étant perpendiculaires à l'intersection *Aa*, des deux plans *Ab*, *Ac*, font le même angle que ces plans, et par conséquent (320) un angle égal à l'angle sphérique DGF.

Supposons donc que les angles observés BAC, *DAa*, C*Aa* soient respectivement de $82^\circ\ 10'$, $77^\circ\ 42'$, $74^\circ\ 24'$; il s'agit donc (Fig. 180) de calculer l'angle B opposé au côté AC de $82^\circ\ 10'$ dans le triangle sphérique ABC, dont les trois côtés AB, AC, BC sont respectivement de 70° $24'$, $82^\circ\ 10'$, $77^\circ\ 42'$. Donc, conformément à ce qui a été dit dans la question VI, je calcule la demi-différence des deux segments BD et CD, par cette proportion $tang. \frac{BC}{2} : tang. \frac{AC+AB}{2} :: tang. \frac{AC-AB}{2} : tang. \frac{CD-BD}{2}$; c'est-à-dire : $tang.\ 38^\circ\ 51' : tang.\ 78^\circ\ 17' :: tang.\ 3^\circ\ 53'$, $tang. \frac{CD-BD}{2}$.

Opérant par logarithmes, j'ai. . . . .

Log. tang. $3^\circ\ 53'$	8,8317478
Log. tang. $78^\circ\ 17'$	10,6832050
Complément arithmétique du log. tang. $48^\circ\ 51'$ . .	0,0939569
Somme *ou log. tang.* $\frac{CD-BD}{2}$	19,6089097

Qui répond à $22^\circ\ 7'$.

Retranchant $22^\circ\ 7'$ qui est la demi-différence, de la moitié de BC, c'est-à-dire, de $38^\circ\ 51'$, nous aurons (301) le plus petit segment BD de $16^\circ\ 44'$; alors dans le triangle rectangle *ADB*, pour avoir l'angle B, je fais, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, cette proportion.

tang. AB : BD : : R : *cos.* B, c'est-à-dire, *tang.* 74° 24′ : *tang.* 16° 44′ : : R : *cos.* B.

Et opérant par logarithmes, j'ai. . . . .

Log. tang. 16° 44′. 9,4780592
Log. du Rayon. . . . . 10. . . . .
Complément arithmétique du log. tang. 74° 24′. 89,4459232

Somme *ou log. cos. B*. 108,9239824

Qui répond à 4° 48′, dont le complément 85° 12′ est la valeur de l'angle B, c'est-à-dire, (Fig. 184) de l'angle *bac*.

Pour réduire l'angle *C* à l'angle *c*, on feroit un calcul semblable, en supposant qu'on eût observé l'angle ACB, l'angle ACc, et l'angle BCc.

A l'égard du troisième angle *b*, il n'est pas nécessaire de le calculer, parce que le triangle *abc* étant rectiligne, ses trois angles valent deux droits.

Remarque.

En supposant toujours qu'aucune partie d'un triangle sphérique n'est plus de 180°, on peut déterminer par une règle assez simple, si ce qu'on cherche doit être moindre que 90°, ou s'il peut indifféremment être plus grand ou plus petit. Voici cette règle.

Si le quatrième terme de l'analogie ou proportion que vous êtes obligé de faire pour resoudre un triangle sphérique, est un sinus, l'arc auquel il appartiendra peut indifféremment être de moins, ou de plus que 90°, excepté le cas où le triangle étant rectangle, il se trouveroit parmi les trois choses connues, une qui seroit opposée dans le triangle à celle que l'on cherche. Dans ce cas (844) ces deux dernières quantités sont toujours de même espèce entr'elles.

Mais si le quatrième terme est un cosinus, ou une cotangente, ou une tangente, alors observez, à l'égard des termes connus de la proportion, la règle suivante. Donnez le signe + au rayon et à tous les sinus, soit que les arcs auxquels ils appartiennent soient plus grands, soit qu'ils soient plus petits que 90°. Donnez pareillement le signe + à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus petits que 90°; et au contraire donnez le signe —, à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus grands que 90°. Alors si le nombre des signes —, est zéro, ou pair, l'arc qui répond au quatrième terme sera toujours moindre que 90°; il sera au contraire plus grand que 90°, si le nombre des signes — est impair.

Cette règle est fondée, 1.° sur la regle pour la multiplication et la division des quantités considérées par rapport a leurs signes; on verra cette derniere dans l'Algebre 2.° Sur ce qui a ete observé (273 *et suiv.*) relativement aux sinus, cosinus, etc. des arcs plus petits ou plus grands que 90°.

FIN.

607286

3.

4.

4

14.

15.

20

21

25.

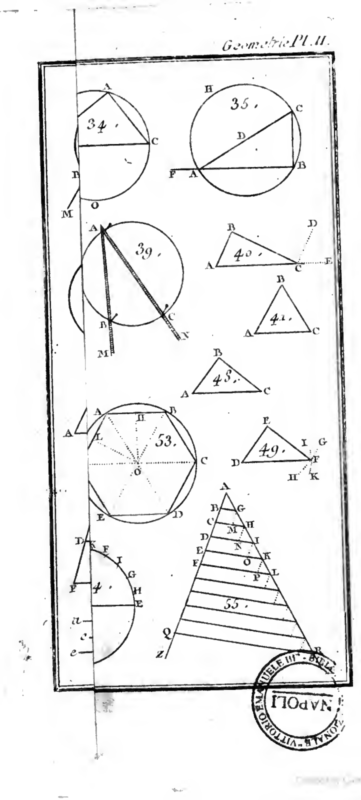
26.

8.

29.

30.

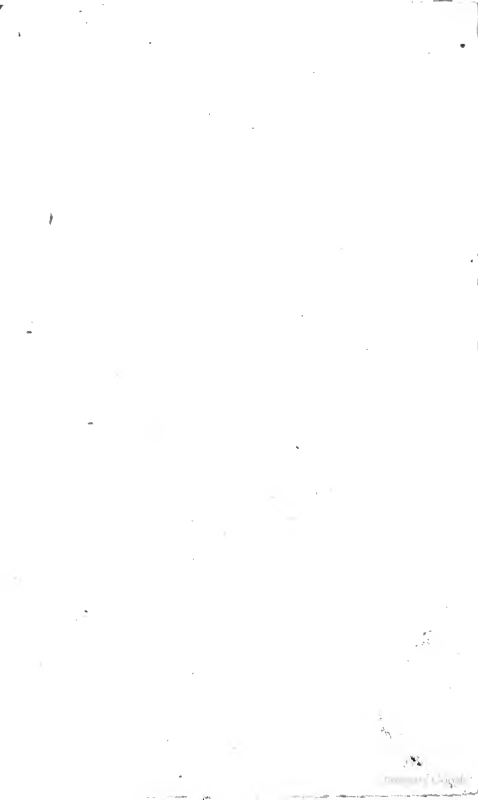
VITTORIO EMANUELE III · BIBL · NAPOLI


34.
35.
39.
40.
41.
53.
49.
55.
NAPOLI

Digitized by Google

NAPOLI

Digitized by Google


Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIO NAPOLI VITTORIO EMANUE

Digitized by Google

169.

170.

174.

175.

179.

180.

184.

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

